Zpracování měření a vyhodnocení jejich chyb

Fyzika je nerozlučně spojena s experimentem, a experiment znamená měření. Na začátku stojí potřeba určit nějakou veličinu, a k tomu je nutné zvolit metodu měření. Tato zase vyžaduje aparaturu. Potom je možné začít s vlastním měřením, které však není, a ani nemůže být zcela přesné. Mohou za to nedostatky měřicích přístrojů i metody měření. Proto je nutno postupovat při zpracování naměřených hodnot tak, abychom jejich přesnost či nepřesnost mohli určit.

1 Přesnost naměřených hodnot

Při měření obvykle nastávají tyto chyby:

Systematické chyby vyplývají z podstaty měření a použitých přístrojů. V některých případech spočívají ve špatné kalibraci přístroje, a můžeme je snadno odstranit, příkladem je špatná poloha nuly. Jindy jde o nevhodně zvolenou metodu měření, potom je třeba zvolit jinou, s tímto problémem se setkáme u měření elektrického odporu pomocí napětí a proudu – zapojíme voltmetr přímo ke zdroji, nebo přímo k rezistoru? V prvém případě se měří napětí na ampérmetru i rezistoru, v druhém se zase měří proud tekoucí rezistorem i voltmetrem, a obojí způsobí chybu...

Náhodné chyby rovněž spočívají v nedostatcích přístrojů případně měřeného objektu, měřené hodnoty jsou však (v ideálním případě) souměrně rozloženy okolo střední, „správné“ hodnoty, a pokud bychom provedli nekonečný počet měření, jejich aritmetickým průměrem bychom dostali správnou hodnotu.

Hrubé chyby jsou způsobeny nedbalostí osoby provádějící měření nebo poruchou přístrojů. Vyskytují-li se při měření ojediněle, poznáme je při zpracování podle toho, že jimi ovlivněné hodnoty se velmi odlišují od ostatních, a proto je ze souboru hodnot vyřazujeme.

1.1 Přesnost jednoho měření

Přesnost naměřených hodnot můžeme stanovit více způsoby. Pokud měříme jen jednu hodnotu, nebo jich měříme více, ale měřidlo či měřicí přístroj nám dává stále stejnou hodnotu (to se stane, když měříme posuvným měřidlem rozměry přesně vyrobený předmět), můžeme použít přesnější přístroj, nebo chybu stanovit jinak, pomocí třídy přesnosti stanovené dodavatelem přístroje. Pokud ji výrobce nestanovil, odhadneme chybu na jeden nejmenší dílek či jeho polovinu. To platí např. pro skládací či svinovací metr, nebo posuvné měřítko. Je-li chyba stanovena, jako tomu bývá u ručkových galvanoměrů, můžeme ji určit z tohoto vztahu:

$$\text{chyba měření} = \frac{\text{počet dílků na stupnici}}{\text{naměřený počet dílků}} \cdot \text{chyba daná výrobcem} \tag{1}$$

Potom je zřejmé, že je výhodné přiblížit se co nejvíce konci stupnice takového měřicího přístroje přepnutím na vhodný rozsah napětí či proudu.

1.2 Přesnost řady měření

Máme-li více různých hodnot, můžeme chybu vypočítat pomocí vztahů, které zde odvozovat nebudeme, ale jsou odvozeny např v [1].

Jako výslednou hodnotu měření používáme *aritmetický průměr*, který je dán vztahem

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_i \tag{2}$$

Nepřesnost průměru udává tzv. *směrodatná odchylka* či *střední kvadratická chyba* daná vztahem

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N(N-1)}} \tag{3}$$

Naměřenou veličinu potom zapisujeme ve tvaru $\overline{x} \pm \sigma$, což značí, že se veličina nachází v intervalu $\langle \overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma \rangle$.

2 Přesnost vypočítaných hodnot

Začněme tentokrát příkladem. Bylo provedeno měření doby volného pádu tělesa, které bylo použito k určení výšky budovy. Jde o experimentální úlohu z [2].

měření	1	2	3	4	5	průměr
čas	1,92	1,89	2,07	1,91	1,97	1,952

2.1 První pokus

Výška budovy je zřejmě určena vztahem

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2} \tag{4}$$

Průměrná doba pádu je podle vztahu (2) $t = 1{,}952$ s, směrodatná odchylka podle (3) je $\sigma_t = 0{,}3231$, máme tedy $t \doteq (1{,}95 \pm 0{,}03)$ s. Odchylku zpravidla zaokrouhlujeme na jednu platnou číslici (někdy dvě), v souladu s tím potom zapisujeme průměrnou hodnotu veličiny na shodný počet desetinných míst míst.

Výšku budovy spočítáme dosazením nezaukrouhleného času, $h = 18{,}6895$ m, jak to ale bude s její chybou?

Zkusme nahradit čas t výrazem $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} h + \Delta h &= \frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 \\ \Delta h &= \frac{1}{2}g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2) = gt\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Po dosazení $\Delta t = \sigma_t$ dostaneme $\Delta h = 0{,}6238$ m, výška budovy tedy činí $h = (18{,}7 \pm 0{,}6)$ m.

2.2 Zákon o šíření chyb

Pro výpočet chyb můžeme použít sadu pravidel, které se říká zákon o šíření chyb. Je založen na relativních chybách, které jsou zavedeny jako poměr směrodatné odchylky a aritmetického průměru:

$$\rho = \frac{\sigma}{\overline{x}} \tag{6}$$

Výsledná relativní chyba vypočítané veličiny je potom dána těmito pravidly:

1. Při součtu či rozdílu veličin uvažujeme z relativních chyb jednotlivých členů tu největší.

2. Při součinu či rozdílu hodnot relativní chyby jednotlivých hodnot sčítáme.

3. Při umocňování hodnoty relativní chybu exponentem násobíme, při odmocňování dělíme.

Zkusme tuto metodu použít na zmíněné měření. Relativní chyba času činí $\rho_t = 1{,}655\%$. Podle uvedených pravidel dostaneme relativní chybu výšky $\rho_h = 2 * \rho_t = 3{,}31\%$, z čehož plyne chyba výšky $\Delta h = 0{,}6187$. Dostáváme tak $h = (18{,}7 \pm 0{,}6)$ m.

Odvozením těchto pravidel se zabývat nebudeme, zkusme je alespoň zdůvodnit s využitím našeho příkladu. Podělme rovnici (5) rovnicí (4):

$$\frac{\Delta h}{h} = 2\frac{\Delta t}{t} + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 \quad (7)$$

$$\rho_h = 2\rho_t + \rho_t^2 \quad (8)$$

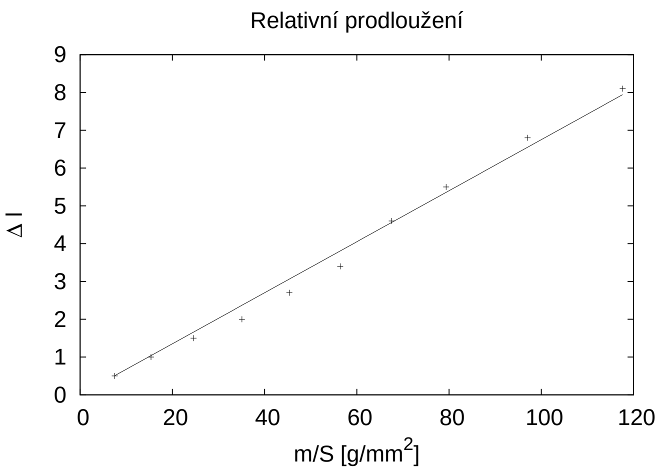
Pokud tedy vezmeme jen členy prvního řádu, dostaneme totéž, co říkají výše uvedená pravidla.

3 Lineární regrese a metoda nejmenších čtverců

Chceme-li z naměřených hodnot určit poměr veličin (konstantu úměrnosti), můžeme využít tzv. *lineární regresi* založenou na *metodě nejmenších čtverců*. Co jsou ony nejmenší čtverce, a proč se metoda nazývá lineární regrese, je vysvětleno v [1], nebo mnoha učebnicích numerických metod. Lineární regresi lze provádět ručně, výpočet je však poněkud zdlouhavý a v dnešní době jej lze snadno provést na počítači např. pomocí programů GNUplot[1], Origin, Microsoft Excel a dalších.

Vypůjčíme si několik prvních hodnot z měření závislosti prodloužení letecké gumy na zatížení [3]. Délka před natahováním činila $l_0 = 0{,}103$ m.

m [g]	Δl [cm]	S [mm^2]	ε
25	0,5	3,333	0,0485
50	1	3,255	0,097
75	1,5	3,05	0,146
100	2	2,85	0,194
125	2,7	2,755	0,262
150	3,4	2,66	0,330
175	4,6	2,59	0,447
200	5,5	2,52	0,534
225	6,8	2,319	0,660
250	8,1	2,125	0,786



Pro malou pružnou deformaci platí Hookův zákon:

$$\sigma = \varepsilon E \quad (9)$$

Veličina E se nazývá modul pružnosti v tahu a tlaku, tu budeme určovat. Normálové napětí poměr síly F působící na plochu průžezu S, je dána tíhou závaží, $F = mg$ a $\varepsilon e = \Delta l / l_0$ je relativní prodloužení. Máme tedy:

$$\frac{mg}{S} = \frac{\Delta l}{l_0} E \Rightarrow \Delta l = \frac{m}{S}\frac{g l_0}{E} \quad (10)$$

V oblasti, kde hodnoty narůstají (alespoň přibližně) lineárně, lze proložit grafem přímku, jež je dána rovnicí

$$y = Ax \quad (11)$$

[1] http://www.gnuplot.info

Program GNUplot, s jehož pomocí byl graf zhotoven, umí toto proložení provést, vypočítat konstantu úměrnosti A včetně chyby. Výsledek: $A = 0{,}0674041 \cdot 10^{-3}, \rho_A = 1{,}829\%$. Porovnáním se vzorcem (10) dostaneme

$$A = \frac{gl_0}{E} \Rightarrow E = \frac{gl_0}{A} \tag{12}$$

Dosazením dostaneme $E \doteq (1500 \pm 30)$ kPa.

Reference

[1] Vybíral, B., *Zpracování dat fyzikálních měření*, studijní text FO
Ke stažení na adrese `http://physics.muni.cz/fo/texty/MERENI.zip`

[2] *Korespondenční aktivity fyzikálního elaborování*, 2. ročník, 1. série

[3] *Korespondenční aktivity fyzikálního elaborování*, 1. ročník, 4. série