Soustavy lineárních rovnic a matice

1 Soustavy lineárních rovnic

1.1 Jednoduchý příklad

Ve fyzice se běžně setkáváme se soustavami rovnic. Pokud se pro tuto chvíli oprostíme od fyzikální problematiky, můžeme rovnici zapsat přímo s číselnými hodnotami. Řešme třeba takovouto soustavu:

$$
\begin{array}{rrcl}
(1) & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 4 \\
(2) & 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 8 \\
(3) & 3x_2 + 5x_3 & = & 7 \\
\hline
(1) & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 4 \\
(2) - 2 \cdot (1) = (2') & -2x_2 - 2x_3 & = & 0 \\
(3) & 3x_2 + 5x_3 & = & 7 \\
\hline
(1) + (2') = (1') & x_1 + x_3 & = & 4 \\
-(2') & 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\
(3) + \frac{3}{2} \cdot (2') = (3') & 2x_3 & = & 7 \\
\hline
(1') - (3'') & x_1 & = & \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2} \cdot (2') - (3'') & x_2 & = & -\frac{7}{2} \\
\frac{1}{2} \cdot (3') = (3'') & x_3 & = & \frac{7}{2}
\end{array}
$$

Místo toho, abychom vyjadřovali neznámé z jednotlivých rovnic a dosazovali je, jsme přítali a odčítali vhodné násobky rovnic mezi sebou, nebo jsme je násobili vhodným číslem. Tento postup je běžně užíván, i když se nepoužívá tohoto zápisu, ale zápisu pomocí matice.

1.2 Gaussova eliminační metoda

Jedná se o úpravu matice na tzv. *redukovaný stupňovitý tvar*. Přeloženo do obyčejného jazyka to znamená, že v této matici budou na diagonále samé jedničky. A co je to ta diagonála? To je první číslo na prvním řádku, druhé číslo na druhém řádku, a tak dále až po poslední řádek či sloupec matice. Toho dosáhneme pomocí *elementárních řádkových operací*. Jsou to tyto:

- záměna libovolných dvou řádků
- násobení kteréhokoli řádku nenulovým číslem (skalárem)
- přičtení jednoho řádku k jinému řádku

Souvislost těchto úprav s lineárními rovnicemi není na první pohled zřejmá. Z koeficientů vhodně zapsané soustavy lineárních rovnic (třeba takové, jako je ta v příkladu výše), můžeme sestavit matici. Pokud je rovnic tolik jako neznámých, vznikne tak matice s počtem sloupců o jedničku vyšším než řádků (v pravém sloupci budou absolutní členy z pravých stran rovnic[1]). Záměna řádků je obdoba záměny dvou rovnic. Libovolnou rovnici lze také vynásobit nenulovým číslem, tak jako řádek matice. Nakonec je také možné k jedné rovnici přičíst jinou, protože její levá a pravá strana jsou si rovny a k oběma stranám rovnice lze přičíst jakékoli číslo.

Matice soustavy lineárních rovnic, má-li řešení, se bude nakonec skládat z matice jednotkové a matice s jediným sloupcem tvořeným kořeny soustavy. Lze to předvést na výše uvedené soustavě:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \end{array}\right)
$$

[1] Pro úplnost je třeba dodat, že pokud jsou tyto absolutní členy nulové, jde o *homogenní soustavu* a také o *homogenní matici*.

Nyní je dobré se zmínit, jak lze poznat, že soustava nemá řešení, nebo jich má nekonečně mnoho. Pokud při úpravách dostaneme řádek, který má jedinou nenulovou hodnotu v pravém sloupci, nemá soustava řešení (to odpovídá nulové levé a nenulové pravé straně – levá strana se pravé nerovná). Může se také stát, že lze dva řádky od sebe beze zbytku odečíst – potom je jedna rovnice součtem násobků ostatních[2]. Zbude-li řádků méně, než kolik má část matice pro levou stranu soustavy sloupců, má soustava řešení nekonečně mnoho.

Maticový způsob výpočtu nemusí být ve všech případech jednodušší a výhodnější, má však tu výhodu, že jej lze snadno převést do počítačového programu.

1.3 Fyzikální příklad – Kirchhoffovy zákony

Kirchhoffovy zákony slouží k nalezení proudů a odporů ve složitém rozvětveném elektrickém obvodu.

1. Kirchhoffův zákon vychází z rovnice kontinuity a říká, že součet všech proudů přitékajících do uzlu je roven součtu všech proudů z uzlu vytékajících.

2. Kirchhoffův zákon je důsledkem Ohmova zákona a říká, že součet úbytků napětí na odporech ve smyčce je roven celkovému elektromotorickému napětí působícímu ve smyčce.

Představme si drátěný čtyřboký jehlan, jehož všechny hrany jsou stejně dlouhé a mají stejný elektrický odpor. Jaký bude mít tento jehlan odpor, připojíme-li jej do obvodu dvěma sousedními vrcholy podstavy?

Abychom tento odpor mohli určit, musíme znát proud procházející celým obvodem. Spolu s proudy jednotlivými hranami tedy máme neznámých proudů, které můžeme určovat. Vytvořme s pomocí Kirchhoffových zákonů devět nezávislých rovnic. Proud celkovým obvodem označme I, proudy mezi vrcholy i a j označme $I_{ij}, i < j$, vrcholy 1-4 náležejí podstavě a 5. vrchol spojuje plášť jehlanu.

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & I & = & I_{12} + I_{14} + I_{15} \\
(2) & I_{12} + I_{25} & = & I_{23} \\
(3) & I_{23} + I_{35} & = & I_{34} \\
(4) & I_{14} + I_{34} + I_{54} & = & I \\
(5) & I_{15} & = & I_{25} + I_{35} + I_{45} \\
(6) & U & = & I_{14}R \\
(7) & U & = & (I_{15} + I_{45})R \\
(8) & U & = & (I_{12} + I_{23} + I_{34})R \\
(9) & U & = & (I_{15} + I_{35} + I_{34})R
\end{array}
$$

Prvních pět rovnic plyne z prvního, další čtyři potom z druhého Kirchhoffova zákona.

Přepišme nyní soustavu rovnic pomocí matice.

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
I & I_{12} & I_{23} & I_{34} & I_{14} & I_{15} & I_{25} & I_{35} & I_{45} & \\
\hline
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{U}{R} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{U}{R} \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{U}{R} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{U}{R}
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
I & I_{12} & I_{23} & I_{34} & I_{14} & I_{15} & I_{25} & I_{35} & I_{45} & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3}\frac{U}{R} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9}\frac{U}{R} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\frac{U}{R} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9}\frac{U}{R} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{U}{R} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{9}\frac{U}{R} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{9}\frac{U}{R} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9}\frac{U}{R} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9}\frac{U}{R}
\end{array}\right)
$$

Dostáváme tedy $I = \frac{5}{3}\frac{U}{R}$, či $U = \frac{3}{5}IR$. Podle Ohmova zákona platí:

$$U = IR' = \frac{3}{5}IR \Rightarrow R' = \frac{3}{5}R$$

Celkový odpor takto zapojeného jehlanu činí tři pětini odporu jedné jeho hrany.

[2] Je jejich lineární kombinací.