1. domácí úkol do cvičení z diferenciálního a integrálního počtu na varietách

Tomáš Záležák

1. Kolik různých topologií τ je možné vytvořit na trojprvkové množině $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$?

Nejjednodušší je bude všechny vyjmenovat, je jich celkem dvacet devět:

- triviální: $\tau_0 = \{\varnothing, \mathcal{M}\}$
- s jedním dalším prvkem (6): $\tau_1 = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{A\}\}$, $\tau_2 = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{B\}\}$, $\tau_3 = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{C\}\}$, $\tau_4 = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{A, B\}\}$, $\tau_5 = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{B, C\}\}$, $\tau_6 = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{A, C\}\}$
- kombinace předchozích možností (6): $\tau_7 = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{A\}, \{A, B\}\}$, $\tau_8 = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{B\}, \{A, B\}\}$, $\tau_9 = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{B\}, \{B, C\}\}$, $\tau_{10} = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{C\}, \{B, C\}\}$, $\tau_{11} = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{C\}, \{A, C\}\}$, $\tau_{12} = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{A\}, \{A, C\}\}$
- kombinace předchozích možností (3): $\tau_{13} = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{A\}, \{A, B\}, \{A, C\}\}$, $\tau_{14} = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{B\}, \{A, B\}, \{B, C\}\}$, $\tau_{15} = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{C\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$
- se dvěma dalšími s prázdnými průniky (3): $\tau_{16} = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{A\}, \{B, C\}\}$, $\tau_{17} = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{B\}, \{A, C\}\}$, $\tau_{18} = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{C\}, \{A, B\}\}$
- diskrétní: $\tau_{19} = \{\varnothing, \mathcal{M}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}\}$
- JEŠTĚ DEVĚT!

2. Je Hausdorffovost topologický invariant? Tj. zachovává se při homeomorfismu?

Hausdorffovost množiny $\mathcal{X}$ je zavedena takto: $\forall x, y \in \mathcal{X} \exists \mathrm{O}(x), \mathrm{O}(y) : \mathrm{O}(x) \cap \mathrm{O}(y) = \varnothing$. Nechť $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ je homeomorfismus. Pokud není $\mathcal{Y}$ hausdorffovská, tak $\exists f(x), f(y) \in \mathcal{Y} : \forall \mathrm{O}(f(x)), \mathrm{O}(f(y)) : \mathrm{O}(f(x)) \cap \mathrm{O}(f(y)) \neq \varnothing$. Protože je f homeomorfismus, platí $\forall \mathrm{O}(f(x)) \exists \mathrm{O}(x) : f(\mathrm{O}(x)) \subseteq \mathrm{O}(f(x))$. Pro množinu $\mathcal{Y}$ a výše zmíněné dva body $f(x), f(y)$ musí platit platit $f(\mathrm{O}(x)) \cap f(\mathrm{O}(y)) \neq \varnothing$. Takže by mělo platit, že $\mathrm{O}(x) \cap \mathrm{O}(y) \neq \varnothing$, to je ale spor.

3. Jsou následující topologické prostory s indukovanou přirozenou topologií homeomorfní?

- otevřený čtverec a $\mathbb{R}^2$

  Ano. Otevřený čtverec je otevřený dvojrozměrný kvádr a ten je homeomorfní s $\mathbb{R}^2$. Třeba takto. Čtverec má stranu a a střed v počátku souřadnic. Pak $f : (x, y) \mapsto (\operatorname{tg} \frac{x}{a}\pi, \operatorname{tg} \frac{y}{a}\pi)$ je vhodný homeomofismus.
- otevřený kruh a $\mathbb{R}^2$

  Ano, ze stejného důvodu. Lze třeba najít homeomorfismus mezi čtvercem a kruhem, jako je transformace z kartézských do polárních souřadnic.
- $\mathcal{S}^1$ a okraj čtverce.

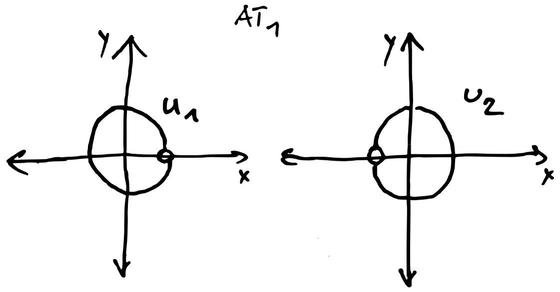
  Ano. Umístíme-li střed kružnice na střed čtverce, tak každému bodu kružnice lze přiřadit bod čtverce polopřímkou vedoucí z jejich společného středu. Tedy $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$ a válec $S^1 \times \mathbb{R}$

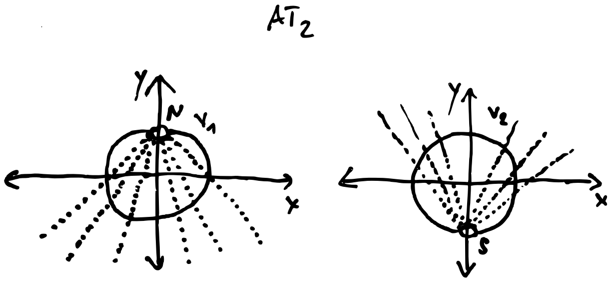
  Ano. Válec lze parametrizovat pomocí výšky h a úhlu φ, rovinu bez počátku souřadnic vzdálenosti r od počátku a úhlu φ. Vhodný homeomorfismus je $(h, \varphi) \mapsto (R_0 \cdot e^h, \varphi)$, kde R_0 je poloměr válce. Část válce pod rovinou se promítne dovnitř kruhu, část nad rovinou zase ven. Kružnice, kterou má válec s rovinou společnou, se promítne sama na sebe.

2. domácí úkol do cvičení z diferenciálního a integrálního počtu na varietách

Tomáš Záležák

1. Rovnicí $x^2 + y^2 = 1$ je dána jednotková kružnice $\mathcal{S}^1$. Na ní lze vybrat množiny $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ podle obrázku.





Kružnice je lokálně homeomorfní s $\mathbb{R}$. Množina $\mathcal{U}_1$ je homeomorfní s $\mathbb{R}$ takto: $\varphi_1(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $\varphi_1(\mathcal{U}_1) = (0, 2\pi)$. Množina $\mathcal{U}_2$ obdobně: $\varphi_2(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi$, $\varphi_2(\mathcal{U}_2) = (-\pi, \pi)$. Dohromady vznikne $\mathcal{AT}_1 = \{(\mathcal{U}_1, \varphi_1), (\mathcal{U}_2, \varphi_2)\}$, což je atlas na této kružnici. Lze použít zúžení přirozené topologie na tuto kružnici, tj. τ_M. Axiomy pro atlas jsou splněny:

1. $\mathcal{U}_i \in \tau_M$, $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i = S^1$.
2. $\varphi_i : \mathcal{U}_i \mapsto \varphi_i(\mathcal{U}_i) \subset \mathbb{R}$ jsou homeomorfismy, $\varphi_i(\mathcal{U}_i) \in \tau_{\mathbb{R}}$.
3. $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \mapsto \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ je difeomorfismus.

U prvních dvou je platnost zřejmá, u třetího jsou tato zobrazení: $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi) \mapsto (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ a $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \mapsto (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Je však možné vytvořit i jiný atlas $\mathcal{AT}_2$ s množinami $\mathcal{V}_1 = \mathcal{S}^1 \setminus \{N\}, \mathcal{V}_2 = \mathcal{S}^1 \setminus \{S\}$ a zobrazeními ψ_1, ψ_2. Lze snadno zjistit, že $\psi_1(x,y) = \frac{x}{1-y}$ a $\psi_2(x,y) = \frac{x}{1+y}$. Také lze ukázat, že $\psi_1(x,y) = 1/\psi_2(x,y)$.

Nyní je možné ukázat, že jsou atlasy $\mathcal{AT}_1$ a $\mathcal{AT}_2$ kompatibilní, tj. $\mathcal{AT}_1 \cup \mathcal{AT}_2$ je také atlas. První dva jsou jistě splněny. U třetího je potřeba prověřit tato zobrazení:

- $\psi_1 \circ \varphi_1^{-1} : \alpha \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, 2\pi) \mapsto (x,y) \mapsto \mathbb{R} \ni \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$
- $\psi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \alpha \in (-\pi, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \mapsto (x,y) \mapsto \mathbb{R} \ni \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$
- $\psi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \alpha \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, 2\pi) \mapsto (x,y) \mapsto \mathbb{R} \ni \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$
- $\psi_2 \circ \varphi_2^{-1} : \alpha \in (-\pi, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \mapsto (x,y) \mapsto \mathbb{R} \ni \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

Atlasy $\mathcal{AT}_1$ a $\mathcal{AT}_2$ jsou tedy kompatibilní.

Tenzor křivosti – řez bandlu $\otimes_1^3 TM$:

Platí pro něj tento vztah:

$$R(\xi,\eta,\lambda) = \nabla_\xi \nabla_\eta \lambda - \nabla_\eta \nabla_\xi \lambda - \nabla_{[\xi,\eta]}\lambda$$

Za úkol je najít vyjádření ve složkách. Nejprve si tedy vyjádříme dílčí operace. Nejprve $\nabla_\eta \lambda$:

$$\nabla_\eta \lambda = \left(\eta^i \lambda^j \Gamma^k_{ij} + \eta^i \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

Nyní ještě $\nabla_\xi \nabla_\eta \lambda$:

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi \nabla_\eta \lambda &= \nabla_\xi \left(\eta^i \lambda^j \Gamma^k_{ij} + \eta^i \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \xi^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \left(\eta^i \lambda^j \Gamma^k_{ij} + \eta^i \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \\
&= \xi^l \left(\eta^i \lambda^j \Gamma^k_{ij} + \eta^i \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i}\right)\Gamma^m_{lj}\frac{\partial}{\partial x^l} + \xi^l \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\eta^i \lambda^j \Gamma^k_{ij} + \eta^i \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \\
\nabla_\xi \nabla_\eta \lambda &= \left[\xi^l \Gamma^m_{lk}\left(\eta^i \lambda^j \Gamma^k_{ij} + \eta^i \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i}\right) + \xi^l \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\eta^i \lambda^j \Gamma^k_{ij} + \eta^i \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x^m}
\end{aligned}$$

Obdobně vyjde vztah pro zaměněné vektory ξ, η:

$$\nabla_\eta \nabla_\xi \lambda = \left[\eta^l \Gamma^m_{lk}\left(\xi^i \lambda^j \Gamma^k_{ij} + \xi^i \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i}\right) + \eta^l \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\xi^i \lambda^j \Gamma^k_{ij} + \xi^i \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x^m}$$

Dále je potřeba vztah $\nabla_{[\xi,eta]}\lambda$:

$$\nabla_{[\xi,\eta]}\lambda = \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \lambda^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\left(\lambda^k \Gamma^m_{ik} + \frac{\partial \lambda^m}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^m}$$

Nakonec se to dá všechno dohromady:

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi \nabla_\eta \lambda - \nabla_\eta \nabla_\xi \lambda - \nabla_{[\xi,\eta]}\lambda &= \Bigg\{ \left[\xi^l \Gamma^m_{lk}\left(\eta^i \lambda^j \Gamma^k_{ij} + \eta^i \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i}\right) + \xi^l \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\eta^i \lambda^j \Gamma^m_{ij} + \eta^i \frac{\partial \lambda^m}{\partial x^i}\right)\right] - \\
&- \left[\eta^l \Gamma^m_{lk}\left(\xi^i \lambda^j \Gamma^k_{ij} + \xi^i \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i}\right) + \eta^l \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\xi^i \lambda^j \Gamma^m_{ij} + \xi^i \frac{\partial \lambda^m}{\partial x^i}\right)\right] - \\
&- \left[\left(xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\left(\lambda^k \Gamma^m_{ik} + \frac{\partial \lambda^m}{\partial x^i}\right)\right]\Bigg\}\frac{\partial}{x^m}
\end{aligned}$$

Většina členů se odečte. Pro přehlednost jsou zbylé členy v hranatých závorkách a vyrušení členy v kulatých.

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi \nabla_\eta \lambda - \nabla_\eta \nabla_\xi \lambda - \nabla_{[\xi,\eta]}\lambda &= \Bigg\{ \left[\xi^l \eta^i \lambda^j \Gamma^m_{lk}\Gamma^k_{ij} - \xi^i \eta^l \lambda^j \Gamma^m_{lk}\Gamma^k_{ij}\right] + \left[\frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^l}\xi^l \eta^i \lambda^j - \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^l}\xi^i \eta^l \lambda^j\right] + \\
&+ \left(\xi^l \eta^i \Gamma^m_{lk}\frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i} - \xi^i \eta^l \Gamma^m_{ij}\frac{\partial \lambda^j}{\partial x^l}\right) + \left(\xi^l \eta^i \Gamma^m_{ij}\frac{\partial \lambda^j}{\partial x^l} - \xi^i \eta^l \Gamma^m_{lk}\frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i}\right) + \\
&+ \left(\xi^l \lambda^j \Gamma^m_{ij}\frac{\partial \eta^i}{\partial x^l} - \xi^j \lambda^k \Gamma^m_{ik}\frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}\right) + \left(\eta^j \lambda^k \Gamma^m_{ik}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \eta^l \lambda^j \Gamma^m_{ij}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right) + \\
&+ \left(\eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\frac{\partial \lambda^m}{\partial x^i} - \eta^l \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\frac{\partial \lambda^m}{\partial x^i}\right) + \left(\xi^l \eta^i \frac{\partial^2 \lambda^m}{\partial x^l \partial x^i} - \xi^i \eta^l \frac{\partial^2 \lambda^m}{\partial x^l \partial x^i}\right)\Bigg\}\frac{\partial}{\partial x^m}
\end{aligned}$$

Dostali jsme tuto rovnost:

$$\nabla_\xi \nabla_\eta \lambda - \nabla_\eta \nabla_\xi \lambda - \nabla_{[\xi,\eta]}\lambda = \xi^i \eta^j \lambda^l \left[\Gamma^m_{ik}\Gamma^k_{jl} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^k_{il} + \frac{\partial \Gamma^m_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial x^j}\right]\frac{\partial}{\partial x^m}$$

Použijeme-li značení pomocí složek tenzoru, bude vztah vypadat takto:

$$\nabla_\xi \nabla_\eta \lambda - \nabla_\eta \nabla_\xi \lambda - \nabla_{[\xi,\eta]}\lambda = R(\xi,\eta,\lambda) = R^m_{ijl}\xi^i \eta^j \lambda^l \frac{\partial}{\partial x^m}$$

Pro složky tenzoru pak zřejmě platí:

$$R^m_{ijl} = \Gamma^m_{ik}\Gamma^k_{jl} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^k_{il} + \frac{\partial \Gamma^m_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial x^j}$$