1. domácí úkol do cvičení z integrování forem

Tomáš Záležák

1. Je dán topologický prostor $(\mathcal{X}, \tau)$.

a) Množina $\mathcal{A}$ je otevřená $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}^\circ$.

"$\Leftrightarrow$": $\mathcal{A} \in \tau$ ($\mathcal{A}$ je otevřená). $\mathcal{A}^\circ = \{x \in \mathcal{X} : \exists \mathcal{U}_i \subset \mathcal{A} : x \in \mathcal{U}_i \wedge \mathcal{U}_i \in \tau\}$. Vnitřek $\mathcal{A}$ se skládá z takových bodů z $\mathcal{X}$, která mají otevřená okolí nacházející se v $\mathcal{A}$. Pak lze pro vnitřek napsat třeba toto: $\mathcal{A}^\circ = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$. Sjednocení otevřených množin utvoří také otevřenou množinu – je to jeden z axiomů topologie. Při tom platí $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ a proto je otevřená množina rovna svému vnitřku. Stejně tak platí, že je-li množina rovna svému vnitřku, který je možné poskládat z otevřených pokrytí, tak musí být otevřená.

b) Množina $\mathcal{A}^\circ$ je největší otevřená množina obsažená v $\mathcal{A}$.

Předpokládejme, že $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$. Můžeme k tomu vytvořit další množinu $\mathcal{A}' = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \cup \mathcal{U}'$. $\mathcal{U}'$ je taková otevřená množina, že $\forall i \in I : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}' = \varnothing$. Má-li platit $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, musí být $\mathcal{U}' = \varnothing$. Vnitřek množiny $\mathcal{A}$ je největší množina v $\mathcal{A}$, protože přidáme-li nějakou neprázdnou množinu, která nemá s vnitřkem žádný společný bod, dostaneme množinu, která nemůže být podmnožinou $\mathcal{A}$.

c) Množina $\mathcal{A}$ je uzavřená $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$.

Uzávěr množiny je definován takto: $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{A}^\circ$. Podle definice je množina uzavřená tehdy, je-li její doplněk otevřená množina. $\mathcal{A}^\circ$ je otevřená, to už je dokázáno. Proto musí platit ekvivalence uvedená v zadání.

d) Množina $\overline{\mathcal{A}}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující $\mathcal{A}$.

Množina $(\mathcal{X} \setminus \mathcal{A})^\circ$ je největši množina, kterou obsahuje doplněk $(\mathcal{X} \setminus \mathcal{A})$. Platí také, že $\overline{\mathcal{A}} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{A})^\circ = \varnothing$ a $\overline{\mathcal{A}} \cup (\mathcal{X} \setminus \mathcal{A})^\circ = \mathcal{X}$. Pak musí výše uvedené tvrzení platit.

2. Zobrazení topologických prostorů se nazývá *homeomorfismus*, je-li bijektivní a f i f^{-1} jsou spojitá. Definujme relaci $\sim$ mezi topologickými prostory $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ takto:

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{Y} \Leftrightarrow \text{mezi } \mathcal{X}, \mathcal{Y} \text{ existuje homeomorfismus}$$

Má být dokázáno, že jde o relaci ekvivalence. Ta musí splňovat tyto tři axiomy:

1. $\mathcal{X} \sim \mathcal{Y} \wedge \mathcal{Y} \sim \mathcal{X}$ ... symetrii

   Je-li dáno zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ a $f^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, můžeme zvolit ještě jedno: $g = f^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ a $g^{-1} = f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

2. $\mathcal{X} \sim \mathcal{X}$ ... reflexivitu

   Pokud jde o zobrazení v jediném topologickém prostoru, tedy $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, bude reflexivita splněna.

3. $\mathcal{X} \sim \mathcal{Y} \wedge \mathcal{Y} \sim \mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{X} \sim \mathcal{Z}$ ... transitivitu

   Máme-li zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, f^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}, g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}, g^{-1} : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$, dostaneme jejich poskládáním nová zobrazení $h = f \circ g : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ a $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$.

2. domácí úkol do cvičení z integrování forem

Tomáš Záležák

3. Nechť $f, g : \mathcal{A} \to \mathcal{R}$ jsou funkce integrovatelné na $\mathcal{A}$ a nechť na $\mathcal{A}$ platí $f \leq g$. Je třeba dokázat, že $\int_{\mathcal{A}} f \leq \int_{\mathcal{A}} g$.

Zvolme libovolné dělení P množiny $\mathcal{A}$. Potom $\forall s \in P : f \leq g \Rightarrow \inf_{x \in s} f(x) \leq \inf_{x \in s} g(x) \wedge \sup_{x \in s} f(x) \leq \sup x \in s g(x)$. Toto tvrzení plyne přímo z definice infima a supréma a není ani potřeba množinu $\mathcal{A}$ nijak dělit, aby bylo splněno. Pomocí infima a supréma jsou však zavedeny i horní a dolní součty:

$$
\begin{aligned}
L(f, P) &= \sum_{s \in P} \inf_{x \in s} f(x) \cdot \nu(s) \\
L(g, P) &= \sum_{s \in P} \inf_{x \in s} g(x) \cdot \nu(s) \\
U(f, P) &= \sum_{s \in P} \sup_{x \in s} f(x) \cdot \nu(s) \\
U(g, P) &= \sum_{s \in P} \sup_{x \in s} g(x) \cdot \nu(s)
\end{aligned}
$$

Je zřejmé, že tato nerovnost platí i pro horní a dolní součty $(L(f, P) \leq L(g, P), U(f, P) \leq U(g, P))$. Pokud dělení nekonečně zjemníme $(\nu(s) \to 0)$, dostaneme horní a dolní Riemannovy integrály:

$$
\begin{aligned}
\underline{\int_{\mathcal{A}}} f &= \sup_{P \in \mathcal{P}} L(f, P) \\
\underline{\int_{\mathcal{A}}} g &= \sup_{P \in \mathcal{P}} L(g, P) \\
\overline{\int_{\mathcal{A}}} f &= \inf_{P \in \mathcal{P}} U(f, P) \\
\overline{\int_{\mathcal{A}}} g &= \inf_{P \in \mathcal{P}} U(g, P)
\end{aligned}
$$

V zadání je napsáno, že obě funkce jsou integrovatelné, což znamená, že jsou si rovny jejich horní a dolní Riemannovy integrály. Protože ty jsou určeny horními a dolními součty, platí zmíněná nerovnost i zde a dostáváme

$$\int_{\mathcal{A}} f \leq \int_{\mathcal{A}} g$$

To mělo být dokázáno.

3. domácí úkol do cvičení z integrování forem

Tomáš Záležák

4.

a) Množina $\mathcal{T}^k(E)$ všech k-tenzorů na vektorovém prostoru E s operací sčítání a násobení skalárem tvoří vektorový prostor.

Tenzor k-krát kovariantní na vektorovém prostoru E je lineární zobrazení přiřazující k vektorům z tohoto vektorového prostoru reálné číslo, třeba zobrazení $\varphi : E \times \cdots \times E \ni (a_1, \dots a_k) \to \varphi(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}$. Aby množina $\mathcal{T}^k(E)$ tvořila vektorový prostor, musí splňovat 8 axiomů vektorového prostoru. Mějme tedy zobrazení φ uvedené výše a ještě jedno se stejnými vlastnosti – ψ. Pak tedy musí pro $\varphi, \psi, \chi \in \mathcal{T}^k(E), k, l \in \mathbb{R}$ a vektory $a_1, \dots a_k \in E$ platit toto:

1.	$\varphi + \psi = \psi + \varphi$	$x, y \in \mathbb{R}, x = \varphi(a_1, \dots a_k), y = \psi(a_1 \dots a_k) \Rightarrow x + y = y + x$
		Pro reálná čísla musí platit $x + y = y + x$.
2.	$\varphi + (\psi + \chi) = (\varphi + \psi) + \chi$	Pro reálná čísla to platí, je to stejné, jako u 1. axiomu.
3.	$\varphi + 0 = 0 + \varphi = \varphi$	Komutativita je zřejmá. Neutrální prvek může být např.
		$o_{\mathcal{T}^k(E)} : \forall a_1, \dots a_k \in E : o_{\mathcal{T}^k(E)}(a_1, \dots a_k) = 0$
4.	$\exists \omega \in \mathcal{T}^k(E) : \varphi + \omega = 0$	Takové zobrazení splňuje rovnost$\omega(a_1, \dots a_k) = -\varphi(a_1, \dots a_k) \forall a_1, \dots a_k \in E$.
5.	$k \cdot (l \cdot \varphi) = (k \cdot l) \cdot \varphi$	Plyne přímo z vlastností reálných čísel.
6.	$1 \cdot \varphi = \varphi$	— | | —
7.	$k \cdot (\varphi + \psi) = k \cdot \varphi + k \cdot \psi$	Násobení je vzhledem ke sčítání distributivní v oboru reálných čísel.
8.	$(k + l) \cdot \varphi = k \cdot \varphi + l \cdot \varphi$	— | | —

b) Množina všech antisymetrických tenzorů $\bigwedge^k(E)$ je podprostor $\mathcal{T}^k(E)$.

Jde jistě o vektorový prostor, ověřilo by se to stejně, jako v předchozím příkladě. Antisymetrický tenzor můžeme vytvořit pomocí tzv. alternace:

$\varphi \in \mathcal{T}^k(E), a_1, \dots a_k \in E$

$\operatorname{Alt} \varphi(a_1, \dots a_k) = \frac{1}{k!} \sum\limits_{\varsigma \in S_k} (-1)^{|\varsigma|} \varphi(a_{\varsigma(1)}, \dots, a_{\varsigma(k)})$

Antisymetrický tenzor je takový, že prohodíme-li 2 jeho libovolné argumenty, změní se znaménko, tedy např. $\chi \in \bigwedge^k(E), a_1, \dots a_k \in E, 1 \leq i, j \leq k : \chi(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots) = -\chi(\dots, a_j, \dots, a_i, \dots)$. Že je tenzor vytvořený alternací antisymetrický, je zřejmé. Alternace zahrne do součtu vyčíslení tenzoru pro všechny permutace. Pokud tedy změníme pořadí argumentů, změníme všem sčítancům znaménko.

Alternace je tedy zobrazení $\operatorname{Alt} : \mathcal{T}^k(E) \ni \varphi \to \operatorname{Alt} \varphi \in \bigwedge^k(E)$. Množina všech antisymetrických tenzorů je podprostor $\mathcal{T}^k(E)$ proto, že vyčíslení antisymetrického tenzor je speciální lineární kombinací vyčíslení nějakého obyčejného tenzoru.

4. domácí úkol do cvičení z integrování forem

Tomáš Záležák

5. Součin spojitých diferencovatelných diferenciálních forem je spojitá diferencovatelná diferenciální forma.

Máme-li dvě spojité diferencovatelné diferenciální formy $\omega \in \bigwedge^k(T\mathbb{R}^n), \eta \in \bigwedge^l(T\mathbb{R}^n)$, platí pro jejich vnější součin v nějakém bodě $p \in \mathbb{R}^n$

$$(\omega \wedge \eta)(p) := \omega(p) \wedge \eta(p)$$

Po rozepsání do složek dostaneme

$$\begin{aligned}
\omega(p) \wedge \eta(p) &= \Big(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}(p)\ \mathrm{d}x_p^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\Big) \wedge \Big(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} \eta_{j_1 \dots j_l}(p)\ \mathrm{d}x_p^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}\Big) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n}} \omega_{i_1 \dots i_k}(p)\ \eta_{j_1 \dots j_l}(p)\ \mathrm{d}x_p^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x_p^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}
\end{aligned}$$

Zatímco $\omega(p)$ je k-tenzor a $\eta(p)$ je l-tenzor, jejich vnější součin $(\omega \wedge \eta)(p)$ je $k+l$-tenzor. Pak je ω k-forma a η l-forma. Spojitost a diferencovatelnost této formy v bodě p závisí na členu $\omega_{i_1 \dots i_k}(p)\ \eta_{j_1 \dots j_l}(p)$. To je součin složek forem ω a η v bodě p, a ty jsou podle zadání spojité i diferencovatelné, protože jsou takové i tyto formy. Tento součin je proto také spojitý i diferencovatelný stejně jako výsledná forma v bodě p, tedy $(\omega \wedge \eta)(p)$. Tento bod však může být jakýkoli, lze tedy napsat, že $\omega \wedge \eta$ je spojitá diferencovatelná diferenciální forma.

5. domácí úkol do cvičení z integrování forem

Tomáš Záležák

6.

Skalární součin vektorů $a, b \in \mathbb{R}^n$ určený vztahem $\langle a|b\rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ je 2-tenzor na $\mathbb{R}^n$.
Stačí tedy najít takový 2-tenzor, který se při vyčíslení na vektory a, b chová stejně, jako výše uvedený skalární součin. Je-li $(e_1, \ldots, e_n)$ báze v $\mathbb{R}^n$ a $(e^1, \ldots, e^n)$ indukovaná báze v $(\mathbb{R}^n)^*$, platí $e^i(a) = a_i$ a $e^i(b) = b_i$. Skalární součin pak můžeme přepsat takto: $\langle a|b\rangle = \sum_{i=1}^{n} e^i(a)e^i(b)$. To již nápadně připomíná tenzorový součin. Vytvořme tenzor $\varphi = \sum_{i=1}^{n} e^i \otimes e^i$. Je zřejmé, že to je 2-tenzor, tedy $\varphi \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^n)$. Vyčíslíme-li jej na vektory a, b, dostaneme $\varphi(a, b) = \sum_{i=1}^{n} e^i \otimes e^i(a, b) = \sum_{i=1}^{n} e^i(a)e^i(b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, což je výše uvedený skalární součin.

7.

Duální báze k bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) v $\mathbb{R}^4$ je (e^1, e^2, e^3, e^4). Za úkol je vypočítat $\omega \wedge \eta \wedge \rho(x_1, x_2, x_3)$, kde $\omega = 2e^1 + e^3, \eta = e^1 + e^2 + e^3 + 2e^4, \rho = e^1 - e^4$ a $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^4$.

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge \eta \wedge \rho(x_1, x_2, x_3) &= \frac{3!}{1!1!1!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \rho(a, b, c) \\
&= \frac{3!}{1} \frac{1}{3!} \sum_{\varsigma \in S_3} (\omega \otimes \eta \otimes \rho)(x_{\varsigma(1)}, x_{\varsigma(2)}, x_{\varsigma(3)}) \\
&= (2x_{11} + x_{13})(x_{21} + x_{22} + x_{23} + 2x_{24})(x_{31} - x_{34}) \\
&- (2x_{11} + x_{13})(x_{31} + x_{32} + x_{33} + 2x_{34})(x_{21} - x_{24}) \\
&+ (2x_{31} + x_{33})(x_{11} + x_{12} + x_{13} + 2x_{14})(x_{21} - x_{24}) \\
&- (2x_{31} + x_{33})(x_{21} + x_{22} + x_{23} + 2x_{24})(x_{11} - x_{14}) \\
&+ (2x_{21} + x_{23})(x_{31} + x_{32} + x_{33} + 2x_{34})(x_{11} - x_{14}) \\
&- (2x_{21} + x_{23})(x_{11} + x_{12} + x_{13} + 2x_{14})(x_{31} - x_{34})
\end{aligned}
$$

6. domácí úkol do cvičení z integrování forem

Tomáš Záležák

8. Jsou zadány diferencovatelné funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$, $\omega_1, \omega_2, \omega \in \bigwedge^k T\mathbb{R}^m, \eta \in \bigwedge^l T\mathbb{R}^n$.

a) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

Obecný vztah lze doplnit jakoukoli formou $\chi \in \bigwedge^k T\mathbb{R}^s$. Má tedy být dokázáno, že

$$(g \circ f)^* \chi = f^*(g^* \chi)$$

Na pravé straně je nejprve vytvořen inverzní obraz $g^*\chi \in \bigwedge^k T\mathbb{R}^m$, potom jeho další inverze $f^*(g^*\chi) \in \bigwedge^k T\mathbb{R}^n$. Na levé straně ale je složená funkce $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, takže je zřejmé, že inverzní obraz formy χ bude v prostoru $\bigwedge^k T\mathbb{R}^n$. Tedy $(g \circ f)^*\chi \in \bigwedge^k T\mathbb{R}^n$.

b) Pro $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je $\mathrm{d}(f \cdot g) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g$

Funkce f, g jsou 0-formy, takže pro vnější derivaci f platí

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i$$

Pro g platí něco obdobného. Pro součin $f \cdot g$ dostaneme podle pravidel pro derivování součinu funkcí

$$\mathrm{d}(f \cdot g) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{g\, \partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i + \frac{f\, \partial g}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \right) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g$$

c) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2$

Inverzní obraz je definován takto:

$$(f^*\omega_1)(p)(a_1, \ldots, a_k) := \omega_1(f(p))(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k)$$

Jde o vyčíslení inverzního obrazu $f^*\omega_1$ (k-formy na $T_p\mathbb{R}^n$) na vektorech $a_1, \ldots a_k$ v bodě p či o vyčíslení ω_1 (k-formy na $T_p\mathbb{R}^m$) na vektorech $\overline{a}_1, \ldots \overline{a}_k$, tedy na tečných obrazech vektorů $a_1, \ldots a_k$. (Pozn.: $\overline{a}_i^j = \sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial f^j}{\partial x^k})_p a_i^k$) Na základě výše uvedené definice, která platí obdobně pro formu ω_2, můžeme tvrzení přepsat do této podoby:

$$(\omega_1 + \omega_2)(f(p))(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k) = \omega_1(f(p))(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k) + \omega_2(f(p))(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k)$$

Forma přiřazuje každému bodu antisymetrický tenzor, což je multilineární zobrazení, pro něž uvedená rovnost platí. Bude tedy platit i pro inverzní obrazy.

d) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$

Podle definice vnějšího součinu musí platit tato rovnost reálných čísel:

$$f^*(\omega \wedge \eta)(p)(a_1, \ldots, a_k) = (\omega \wedge \eta)(f(p))(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k)$$

Totéž lze zapsat i bez vektorových argumentů. Vyjde tato rovnost tenzorů:

$$f^*(\omega \wedge \eta)(p) = (\omega \wedge \eta)(f(p))$$

Má-li platit tvrzení uvedené v zadání, stačí ověřit rovnost $(\omega \wedge \eta)(f(p)) = \omega(f(p)) \wedge \eta(f(p))$. Ta je splněna, plyne z vlastností vnějšího součinu. Podle úkolu č. 4 platí

$$\begin{aligned} \omega(f(p)) \wedge \eta(f(p)) &= \Big(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \omega_{i_1 \ldots i_k}(f(p))\ \mathrm{d}x_p^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \Big) \wedge \Big(\sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_l \le m} \eta_{j_1 \ldots j_l}(f(p))\ \mathrm{d}x_p^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_l} \Big) \\ &= \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m \\ 1 \le j_1 < \cdots < j_l \le m}} \sum \omega_{i_1 \ldots i_k}(f(p))\ \eta_{j_1 \ldots j_l}(f(p))\ \mathrm{d}x_p^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x_p^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_l} = (\omega \wedge \eta)(f(p)) \end{aligned}$$

9. Je zadána diferencovatelná funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a diferencovatelný oblouk $c(t) = (x, y) = (t, f(t))$. Koncový bod tečného vektoru vedeného k oblouku v bodě t leží na tečně ke grafu f vedené v bodě $[t, f(t)]$.

Tečný vektor a má na rozdíl od obyčejného vektoru navíc zadané souřadnice bodu, v němž je vázán:

$$a = ([t, f(t)]; \dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

Je-li však křivka parametrizovaná tak, že $x = t, y = f(t)$, tvoří graf funkce $y = f(x)$, jen je použito jiného značení. Rovnice tečny v bodě $[t, f(t)]$ či $[x_0, f(x_0)]$ je pak $y = f'(x) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$. Dosadíme-li koncový bod tečného vektoru $[t + \dot{x}(t), f(t) + \dot{y}(t)] = [x_0 + 1, f(x_0) + f'(x_0)]$, dostaneme tuto rovnost:

$$f(x_0) + f'(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_0 + 1 - x_0) + f(x_0)$$

Velmi stručně by se dalo rovnou napsat, že výše uvedená křivka c splývá s grafem f a tečný vektor k c tak musí ležet v tečně ke grafu f.

7. domácí úkol do cvičení z integrování forem

Tomáš Záležák

10. Je za úkol vypočítat s využitím vhodného řetězce integrál $\int_{\mathcal{C}} \omega$, kde $\omega = (x+y)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y$ a $\mathcal{C}$ je lomená čára spojující body $[1,1]$ a $[3,3]$ po dvou hranách čtverce (jsou dvě možnosti).

Pro obě možnosti platí

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}_1} \omega + \int_{\mathcal{C}_2} \omega$$

Pro první možnost jsou parametrizace $\mathcal{C}_1(x,y) = (t,1); t \in \langle 1,3\rangle$ a $\mathcal{C}_2(x,y) = (3,t); t \in \langle 1,3\rangle$. (To je dolní a pravá hrana.) K výpočtu je potřeba určit inverzní obrazy formy ω:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1^*\omega &= (x\circ\mathcal{C}_1 + y\circ\mathcal{C}_1)\mathrm{d}(x\circ\mathcal{C}_1) + (x\circ\mathcal{C}_1)(y\circ\mathcal{C}_1)\mathrm{d}(y\circ\mathcal{C}_1) = (t+1)\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + t\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
&= (t+1)\cdot 1\cdot \mathrm{d}t + t\cdot 0\cdot \mathrm{d}t = (t+1)\mathrm{d}t \\
\mathcal{C}_2^*\omega &= (x\circ\mathcal{C}_2 + y\circ\mathcal{C}_2)\mathrm{d}(x\circ\mathcal{C}_2) + (x\circ\mathcal{C}_2)(y\circ\mathcal{C}_2)\mathrm{d}(y\circ\mathcal{C}_2) = (3+t)\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + 3t\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
&= (3+t)\cdot 0\cdot \mathrm{d}t + 3t\cdot 1\cdot \mathrm{d}t = 3t\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Z toho dostaneme podle definice tento Riemannův integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}_1} \omega + \int_{\mathcal{C}_2} \omega = \int_{\langle 1,3\rangle} \mathcal{C}_1^*\omega + \int_{\langle 1,3\rangle} \mathcal{C}_1^*\omega = \int_1^3 (t+1)\mathrm{d}t + \int_1^3 3t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_1^3 + 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3 = 18$$

Pro druhou možnost je $\mathcal{C}_1(x,y) = (1,t); t \in \langle 1,3\rangle$ a $\mathcal{C}_2(x,y) = (t,3); t \in \langle 1,3\rangle$. (To je levá a a horní hrana.) Inverzní obrazy formy ω jsou pak:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1^*\omega &= (x\circ\mathcal{C}_1 + y\circ\mathcal{C}_1)\mathrm{d}(x\circ\mathcal{C}_1) + (x\circ\mathcal{C}_1)(y\circ\mathcal{C}_1)\mathrm{d}(y\circ\mathcal{C}_1) = (1+t)\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + t\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
&= (1+t)\cdot 0\cdot \mathrm{d}t + t\cdot 1\cdot \mathrm{d}t = (t+1)\mathrm{d}t \\
\mathcal{C}_2^*\omega &= (x\circ\mathcal{C}_2 + y\circ\mathcal{C}_2)\mathrm{d}(x\circ\mathcal{C}_2) + (x\circ\mathcal{C}_2)(y\circ\mathcal{C}_2)\mathrm{d}(y\circ\mathcal{C}_2) = (t+3)\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + 3t\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
&= (t+3)\cdot 1\cdot \mathrm{d}t + 3t\cdot 0\cdot \mathrm{d}t = 3t\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Vznikne tak odlišný Riemannův integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}_1} \omega + \int_{\mathcal{C}_2} \omega = \int_{\langle 1,3\rangle} \mathcal{C}_1^*\omega + \int_{\langle 1,3\rangle} \mathcal{C}_1^*\omega = \int_1^3 t\mathrm{d}t + \int_1^3 3(t+3)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3 + \left[\frac{t^2}{2} + 3t\right]_1^3 = 14$$

Vyšlo něco jiného, protože jde o křivkový integrál druhého druhu, který odpovídá práci nekonzervativní síly po křivce, ten však závisí na integrační cestě. *Nekonzervativní* znamená, že vektorové pole (označeno např. F) není úplný diferenciál nějaké funkce. Tady je $F = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y, P = x+y, Q = xy$. Aby F bylo úplným diferenciálem, musí platit $P_y = Q_x$, což není splněno $P_y = 1 \neq y = Q_x$.

11. Má být vypočten integrál $\int_{\mathcal{S}} \omega$, $\omega = x^2y^2z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ na dolní polokouli $x^2+y^2+z^2 = R^2$.

Vhodná parametrizace plochy je $\mathcal{S}(x,y,z) = (R\cos\varphi\sin\vartheta, R\sin\varphi\sin\vartheta, R\cos\vartheta)$ pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a $\vartheta \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$.

Inverzní obraz je určen rovností:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^*\omega &= (x^2y^2z\circ\mathcal{S})\mathrm{d}(x\circ\mathcal{S}) \wedge \mathrm{d}(y\circ\mathcal{S}) \\
&= (R^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^4\vartheta\cos\vartheta)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial x}{\partial\vartheta}\mathrm{d}\vartheta\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\mathrm{d}\vartheta\right) \\
&= (R^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^4\vartheta\cos\vartheta)(-R^2\sin^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta - R^2\cos^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta)(\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\vartheta) \\
&= -(R^7\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^5\vartheta\cos^2\vartheta)(\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\vartheta)
\end{aligned}$$

Integrál je pak vypočítán takto:

$$\int_{\mathcal{S}} \omega = \int_{\langle 0,2\pi\rangle\times\langle\frac{\pi}{2},\pi\rangle} \mathcal{S}^*\omega = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -(R^7\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^5\vartheta\cos^2\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$
$$-R^7\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\ \mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^5\vartheta\cos^2\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta$$

První integrál se řeší takto:

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\ \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\ \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\ \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}$$

A druhý takto:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^5\vartheta\cos^2\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta)^2\cos^2\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta = \left|\begin{array}{c} u = \cos\varphi \\ \mathrm{d}u = -\sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi \end{array}\right| =$$
$$-\int_0^{-1}(u^2 - 2u^4 + u^6)\ \mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right]_{-1}^{0} = -\frac{8}{105}$$

Výsledek je $-R^7\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{-8}{105} = \frac{2\pi}{105}R^5$. Na parametrizaci až na znaménko nezávisí. Znaménko závisí na determinantu $\det \mathrm{D}\mathcal{S}$, kde $\mathrm{D}\mathcal{S}$ je Jacobiho matice příslušné transformace souřadnic.

8. domácí úkol do cvičení z integrování forem

Tomáš Záležák

12. Má být vyřešen integrál $\int_c \mathrm{d}\omega, \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, integračním oborem je plocha ohraničená kardioidou, tj. $\partial c(x,y) = (2a\cos 2\pi t - a\cos 4\pi t, 2a\sin 2\pi t - a\sin 4\pi t), t \in \langle 0,1\rangle$. Výpočet má být proveden pomocí Stokesovy věty.

Je dána vnější derivace formy ω. Příslušných forem je nekonečně mnoho, použít lze na příklad $\omega = x\mathrm{d}y$.
K integraci bude potřeba inverzní obraz:

$$\begin{aligned}
\partial c^*\omega &= (x\circ\partial c)\mathrm{d}(y\circ\partial c) = (2a\cos 2\pi t - a\cos 4\pi t)\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \\
&= (2a\cos 2\pi t - a\cos 4\pi t)(4\pi a\cos 2\pi t - 4\pi a\cos 4\pi t)\mathrm{d}t = \\
&= (8\pi a^2\cos^2 2\pi t + 4\pi a^2\cos^2 4\pi t - 12\pi a^2\cos 2\pi t\cos 4\pi t)\mathrm{d}t \\
&= [4\pi a^2(1+\cos 4\pi t) + 2\pi a^2(1+\cos 8\pi t) - 6\pi a^2(\cos 6\pi t + \cos 3\pi t)]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Výpočet je pak takovýto:

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c}\omega = \int_{\langle 0,1\rangle}\partial c^*\omega = \int_0^1 [4\pi a^2(1+\cos 4\pi t) + 2\pi a^2(1+\cos 8\pi t) - 6\pi a^2(\cos 6\pi t + \cos 3\pi t)]\mathrm{d}t = 6\pi a^2$$

13. $\int_{\mathcal{S}}\omega, \omega = (x+z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, plocha $\mathcal{S}$ je povrch elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
Parametrizace: $\mathcal{S}(x,y,z) = (a\cos\varphi\sin\vartheta, b\sin\varphi\sin\vartheta, c\cos\vartheta)$, $\varphi\in\langle 0,2\pi\rangle, \vartheta\in\langle 0,\pi\rangle$.
Inverzní obraz:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^*\omega &= (x\circ\mathcal{S} + z\circ\mathcal{S})\mathrm{d}(x\circ\mathcal{S})\wedge\mathrm{d}(y\circ\mathcal{S}) = (a\cos\varphi\sin\vartheta + c\cos\vartheta)(\tfrac{\partial x}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \tfrac{\partial x}{\partial\vartheta}\mathrm{d}\vartheta)\wedge(\tfrac{\partial y}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \tfrac{\partial y}{\partial\vartheta}\mathrm{d}\vartheta) = \\
&= (a\cos\varphi\sin\vartheta + c\cos\vartheta)(-a\sin\varphi\sin\vartheta\cdot b\sin\varphi\cos\vartheta - a\cos\varphi\cos\vartheta\cdot b\cos\varphi\sin\vartheta)(\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\vartheta) = \\
&= -(a^2b\sin^2\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi + abc\cos^2\vartheta\sin\vartheta)
\end{aligned}$$

Dostaneme tak Riemannův integrál:

$$\int_S\omega = \int_{\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\pi\rangle} S^*\omega = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[a^2b\sin^2\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi + abc\cos^2\vartheta\sin\vartheta\right]\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$-a^2b\left[\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}_{0}\cdot\int_0^{\pi}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\mathrm{d}\vartheta\right] - abc\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\pi}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\right] = \left|\begin{array}{c}\cos\vartheta = t\\ -\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}t\end{array}\right| =$$

$$2\pi abc\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{-1} = -\frac{4}{3}\pi abc$$

Je za úkol vypočítat tento integrál i pomocí Stokesovy věty. Zřejmě je plocha $\mathcal{S}$ hranicí objemu $\mathcal{V}$, který obklopuje, tj. $\mathcal{S} = \partial\mathcal{V}$. Stokesova věta pro tento případ vypadá takto: $\int_{\partial\mathcal{V}}\omega = \int_{\mathcal{V}}\mathrm{d}\omega$. Parametrizace elipsoidu je obdobná, jako v předchozím případě:

$$\mathcal{V}(x,y,z) = (ar\cos\varphi\sin\vartheta, br\sin\varphi\sin\vartheta, cr\cos\vartheta), r\in\langle 0,1\rangle, \varphi\in\langle 0,2\pi\rangle, \vartheta\in\langle 0,\pi\rangle.$$

Vnější derivace:

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

Inverzní obraz:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^*\omega &= \mathrm{d}(x\circ\mathcal{V})\wedge\mathrm{d}(y\circ\mathcal{V})\wedge\mathrm{d}(z\circ\mathcal{V}) = \\
&= (\tfrac{\partial x}{\partial r}\mathrm{d}r + \tfrac{\partial x}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \tfrac{\partial x}{\partial\vartheta}\mathrm{d}\vartheta)\wedge(\tfrac{\partial y}{\partial r}\mathrm{d}r + \tfrac{\partial y}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \tfrac{\partial y}{\partial\vartheta}\mathrm{d}\vartheta)\wedge(\tfrac{\partial z}{\partial r}\mathrm{d}r + \tfrac{\partial z}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \tfrac{\partial z}{\partial\vartheta}\mathrm{d}\vartheta) = \\
&= (-a\cos\varphi\sin\vartheta\cdot br\cos\varphi\sin\vartheta\cdot cr\sin\vartheta - ar\sin\varphi\sin\vartheta\cdot b\sin\varphi\sin\vartheta\cdot cr\sin\vartheta - \\
&- ar\sin\varphi\sin\vartheta\cdot br\sin\varphi\cos\vartheta\cdot c\cos\vartheta - ar\cos\varphi\cos\vartheta\cdot br\sin\varphi\cos\vartheta\cdot c\cos\vartheta)(\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\vartheta) = \\
&= -abcr^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\vartheta
\end{aligned}$$

Zbývá vyřešit tento integrál:

$$\int_{\mathcal{V}}\omega = \int_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\pi\rangle}\mathcal{V}^*\mathrm{d}\omega = -abc\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = -\frac{4}{3}\pi abc$$

Stokesova věta tedy platí i v tomto případě.

9. domácí úkol do cvičení z integrování forem

Tomáš Záležák

14. Na $\mathbb{R}^3$ je vektorové pole $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$. Jsou dány tyto 3 formy:

$$\begin{aligned}
\omega_F^{(1)} &= F^1 \mathrm{d}x + F^2 \mathrm{d}y + F^3 \mathrm{d}z \\
\omega_F^{(2)} &= F^1 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + F^2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + F^3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
\omega_{F^1+F^2+F^3}^{(3)} &= (F^1 + F^2 + F^3)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Také platí tyto vztahy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \omega_{\nabla f}^{(1)} && \ldots \text{protože } \mathrm{d}f = \tfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \tfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \tfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}\omega_F^{(1)} &= \omega_{\nabla\times F}^{(2)} && \ldots \text{protože } \mathrm{d}\omega_F^{(1)} = \mathrm{d}F^1 \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}F^2 \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}F^3 \wedge \mathrm{d}z = \\
& && = (\tfrac{\partial F^3}{\partial y} - \tfrac{\partial F^2}{\partial z})(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) + (\tfrac{\partial F^1}{\partial z} - \tfrac{\partial F^3}{\partial x})(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) + (\tfrac{\partial F^2}{\partial x} - \tfrac{\partial F^1}{\partial y})(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \\
\mathrm{d}\omega_F^{(2)} &= \omega_{\nabla\cdot F}^{(3)} && \ldots \text{protože } \mathrm{d}\omega_F^{(2)} = \mathrm{d}F^1 \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}F^2 \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}F^3 \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \\
& && = \tfrac{\partial F^1}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \tfrac{\partial F^2}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \tfrac{\partial F^3}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Má být dokázáno, že $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$. Z druhého a prvního vztahu a z nulovosti druhé vnější derivace plyne

$$\omega_{\nabla\times(\nabla f)}^{(2)} = \mathrm{d}\omega_{\nabla f}^{(1)} = \mathrm{d}^2 f = 0$$

Dále je za úkol dokázat $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \vec{0}$. Ze třetího a druhého vztahu vyjde

$$\omega_{\nabla\cdot(\nabla\times F)}^{(3)} = \mathrm{d}\omega_{\nabla\times F}^{(2)} = \mathrm{d}^2\omega_F^{(1)} = 0$$

15. Pro 3 formy z předchozí úlohy platí:

$$\begin{aligned}
\omega_F^{(1)} \wedge \omega_G^{(1)} &= \omega_{F\times G}^{(2)} \\
\omega_A^{(2)} \wedge \omega_B^{(1)} &= \omega_{A\cdot B}^{(3)}
\end{aligned}$$

Pro první vztah dostaneme s využitím rovnosti $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0$ plynoucí z antisymetrie vnějšího součinu pro levou stranu přímým výpočtem a pro pravou stranu rozepsáním toto:

$$\begin{aligned}
\omega_F^{(1)} \wedge \omega_G^{(1)} &= (F^1\mathrm{d}x + F^2\mathrm{d}y + F^3\mathrm{d}z) \wedge (G^1\mathrm{d}x + G^2\mathrm{d}y + G^3\mathrm{d}z) = \\
&= (F^2G^3 - F^3G^2)(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) + (F^3G^1 - F^1G^3)(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) + (F^1G^2 - G^2F^1)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \\
\omega_{F\times G}^{(2)} &= (F^2G^3 - F^3G^2)(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) + (F^3G^1 - F^1G^3)(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) + (F^1G^2 - G^2F^1)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z)
\end{aligned}$$

Naprosto stejně se vypočítá levá část a rozepíše pravá část druhého vztahu

$$\begin{aligned}
\omega_A^{(2)} \wedge \omega_B^{(1)} &= (A^1\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + A^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + A^3\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \wedge (B^1\mathrm{d}x + B^2\mathrm{d}y + B^3\mathrm{d}z) \\
&= A^1B^1\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + A^2B^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + A^3B^3\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \\
\omega_{A\cdot B}^{(3)} &= (A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)
\end{aligned}$$

S využitím všech předchozích vztahů mají být dokázány tyto 3 identity vektorové analýzy:

a) $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$

Po přepsání do rovnosti forem dostaneme $\omega_{\nabla\cdot(F\times G)}^{(3)} = \omega_{G\cdot(\nabla\times F)-F\cdot(\nabla\times G)}^{(3)}$. Úpravou levé strany dostaneme

$$\omega_{\nabla\cdot(F\times G)}^{(3)} = \mathrm{d}\omega_{F\times G}^{(2)} = \mathrm{d}(\omega_F^{(1)} \wedge \omega_G^{(1)}) = \mathrm{d}\omega_F^{(1)} \wedge \omega_G^{(1)} - \omega_F^{(1)} \wedge \mathrm{d}\omega_G^{(1)} = \omega_{\nabla\times F}^{(2)} \wedge \omega_G^{(1)} - \omega_F^{(1)} \wedge \omega_{\nabla\times G}^{(2)} =$$
$$\omega_{\nabla\times F}^{(2)} \wedge \omega_G^{(1)} - \omega_{\nabla\times G}^{(2)} \wedge \omega_F^{(1)} = \omega_{(\nabla\times F)\cdot G}^{(3)} - \omega_{(\nabla\times G)\cdot F}^{(3)} = \omega_{G\cdot(\nabla\times F)-F\cdot(\nabla\times G)}^{(3)}$$

Bez vysvětlení zůstal jen poslední krok. Z definice dostaneme rozepsáním vztah $\omega_{A\pm B}^{(3)} = \omega_A^{(3)} \pm \omega_B^{(3)}$.

b) $\nabla \times (f\vec{F}) = \nabla f \times \vec{F} + f(\nabla \times \vec{F})$

Odpovídající zápis přes formy je $\omega_{\nabla\times(fF)}^{(2)} = \omega_{\nabla f\times F}^{(2)} + \omega_{f(\nabla\times F)}^{(2)}$.

Levou stranu lze upravit takto:

$$\omega_{\nabla\times(fF)}^{(2)} = \mathrm{d}\omega_{fF}^{(1)} = \mathrm{d}(f\omega_F^{(1)}) = \mathrm{d}f \wedge \omega_F^{(1)} + f\mathrm{d}\omega_F^{(1)} = \omega_{\nabla f}^{(1)} \wedge \omega_F^{(1)} + f\mathrm{d}\omega_F^{(1)} = \omega_{\nabla f\times F}^{(2)} + \omega_{f(\nabla\times F)}^{(2)}$$

Neobjasněn zůstal tentokrát vztah $\mathrm{d}(f\omega_F^{(1)}) = \mathrm{d}f \wedge \omega_F^{(1)} + f\mathrm{d}\omega_F^{(1)}$:

$$\mathrm{d}(f\omega_F^{(1)}) = \mathrm{d}(fF^1\mathrm{d}x + fF^2\mathrm{d}y + fF^3\mathrm{d}z) = \left(\frac{\partial(fF^3)}{\partial y} - \frac{\partial(fF^2)}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial(fF^1)}{\partial z} - \frac{\partial(fF^3)}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x +$$
$$\left(\frac{\partial(fF^2)}{\partial x} - \frac{\partial(fF^1)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \omega_{\nabla f}^{(1)} \wedge \omega_F^{(1)} + f\omega_{\nabla\times F}^{(2)} = \mathrm{d}f \wedge \omega_F^{(1)} + f\mathrm{d}\omega_F^{(1)}$$

c) $\nabla \cdot (f\vec{F}) = \vec{F} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \vec{F})$

Je tedy potřeba dokázat $\omega_{\nabla\cdot(fF)}^{(3)} = \omega_{F\cdot\nabla f}^{(3)} + \omega_{f(\nabla\cdot\vec{F})}^{(3)}$.

Z levé strany dostaneme:

$$\omega_{F\cdot\nabla f}^{(3)} = \mathrm{d}\omega_{fF}^{(2)} = \mathrm{d}(f\omega_F^{(2)}) = \mathrm{d}f \wedge \omega_F^{(2)} + f\mathrm{d}\omega_F^{(2)} = \omega_F^{(2)} \wedge \mathrm{d}f + f\omega_{\nabla\cdot F}^{(3)} = \omega_{F\cdot\nabla f}^{(3)} + \omega_{f(\nabla\cdot F)}^{(3)}$$

Postup při odvození vztahu $\mathrm{d}(f\omega_F^{(2)}) = \mathrm{d}f \wedge \omega_F^{(2)} + f\mathrm{d}\omega_F^{(2)}$ je podobný, jako v předchozím případě.

10. domácí úkol do cvičení z integrování forem

Tomáš Záležák

16. V této úloze je za úkol určit práci síly $\vec{F}$ pro křivce γ. Křivka γ je část přímky od bodu $[a, b, c]$ do bodu $[2a, 2b, 2c]$. Síla směřuje do středu souřadné soustavy a její velikost je nepřímo úměrná vzdálenosti od roviny dané rovnicí $z = 0$.

Nejprve je potřeba vymyslet vhodnou sílu. Zvolíme-li $\vec{F_1} = (-x, -y, -z)$, směřuje jistě v každém bodě do středu souřadné soustavy, její velikost je však $|\vec{F_1}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vytvoříme-li vektorové pole

$$\vec{F_2} = \frac{\vec{F_1}}{|\vec{F_1}|} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right),$$

je velikost v každém bodě $|\vec{F_2}| = 1$. Stačí zvolit

$$\vec{F} = \frac{1}{z}\vec{F_2} = \left(\frac{-x}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-y}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

Křivku γ lze parametrizovat třeba takto: $\gamma(x, y) = (a(1+t), b(1+t), c(1+t))\,, t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Síle $\vec{F}$ odpovídá forma ω:

$$\omega = -\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x - \frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}y - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}z$$

Inverzní obraz formy se určí takto:

$$\begin{aligned}
\gamma^*\omega &= -\frac{1}{\sqrt{(x\circ\gamma)^2 + (y\circ\gamma)^2 + (z\circ\gamma)^2}} \left[\frac{x\circ\gamma}{z\circ\gamma}\mathrm{d}(x\circ\gamma) + \frac{y\circ\gamma}{z\circ\gamma}\mathrm{d}(y\circ\gamma) + \mathrm{d}(z\circ\gamma) \right] \\
&= -\frac{1}{(1+t)\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \left[\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + c \right] \mathrm{d}t = -\frac{1}{(1+t)\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \frac{a^2+b^2+c^2}{c}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c(1+t)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Práce síly $\vec{F}$ po křivce γ se rovná:

$$\int_\gamma \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_\gamma \omega = \int_{\langle 0,1\rangle} \gamma^*\omega = -\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = -\frac{\ln 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}$$

17.

Je dána síla $\vec{F}$. Má být dokázáno, že práce síly nezávisí na křivce. Za úkol je ještě vypočítat práci po oblouku mezi body $A = [0, 0], B = [1, 1]$ a odpovídající potenciální energii. Síla je rovna:

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x \right)$$

Můžeme zavést jiné značení:

$$\vec{F} = (P, Q); P = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y, Q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x$$

Práce nezávisí na křivce, pokud $P_y = Q_x$, a to tu platí:

$$P_y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \right)_y = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} + 1 = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x \right)_x = Q_x$$

Tvrzení lze snadno dokázat. Zvolíme formu ω:

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

Nezávisí-li práce na křivce, znamená to, že práce po jakékoli uzavřené křivce $\mathcal{C}$ je nulová

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\mathrm{d}r = \int_{\mathcal{C}} \omega = 0$$

Podle Stokesovy věty dostaneme toto ($\mathcal{S}$ je plocha ohraničená křivkou $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$):

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \omega = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\omega = 0$$

Protože to platí pro všechny křivky a plochy, je $\mathrm{d}\omega = 0$. Výše uvedená rovnost je ověřena takto:

$$\mathrm{d}\omega = P_y\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + Q_x\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = (Q_x - P_y)\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Zbývá vypočítat práci po oblouku spojujícím A, B. Víme, že práce na křivce nezávicí, nejsnazší bude počítat práci po úsečce. Parametrizace je $c(x, y) = (t, t), t \in \langle 0, 1\rangle, \omega = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \right) \mathrm{d}x + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x \right) \mathrm{d}y.$

$$\int_c \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_c \omega = \int_{\langle 0,1\rangle} c^*\omega = \int_0^1 \left(\frac{t}{t^2+t^2} + t + \frac{t}{t^2+t^2} + t \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 (\sqrt{2} + 2t)\mathrm{d}t = \left[\sqrt{2}t + t^2 \right]_0^1 = 1 + \sqrt{2}$$

Odpovídající potenciální energie je rovna záporně vzaté práci po křivce: $-1 - \sqrt{2}$. Lze ji určit ale i pomocí kmenové funkce f splňující rovnost $\vec{F} = \nabla f$. Tato kmenová funkce je $f = \sqrt{x^2+y^2} + xy$.

11. domácí úkol do cvičení z integrování forem

Tomáš Záležák

18. Pro $\vec{F} = (2x, 3y^2 + xz, 0)$ se má určit tok pláštěm válce $x^2 + y^2 = R^2, z = 0, z = H$ orientovaným vnější normálou.

Plášť lze parametrizovat takto: $\mathcal{S} = (x, y, z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, h); \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle; h \in \langle 0, H\rangle$. (Bylo by možné zahrnout i podstavy, ale tok by byl nulový, protože pole má nulovou složku ve směru osy z. To se bude hodit při výpočtu přes objem válce pomocí Stokesovy věty.)

Vektorové pole lze zapsat pomocí formy $\omega = 2x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (3y^2 + xz)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$. K výpočtu je potřeba inverzní obraz:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^*\omega &= 2(x \circ \mathcal{S})\mathrm{d}(y \circ \mathcal{S}) \wedge \mathrm{d}(z \circ \mathcal{S}) + [3(y \circ \mathcal{S})^2 + (x \circ \mathcal{S})(y \circ \mathcal{S})]\mathrm{d}(z \circ \mathcal{S}) \wedge \mathrm{d}(x \circ \mathcal{S}) = \\
&= 2R\cos\varphi(\tfrac{\partial y}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \tfrac{\partial y}{\partial h}\mathrm{d}h) \wedge (\tfrac{\partial z}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \tfrac{\partial z}{\partial h}\mathrm{d}h) + \\
&+ (3R^2\sin^2\varphi + Rh\cos\varphi)(\tfrac{\partial z}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \tfrac{\partial z}{\partial h}\mathrm{d}h) \wedge (\tfrac{\partial x}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \tfrac{\partial x}{\partial h}\mathrm{d}h) = \\
&= 2R\cos\varphi \cdot R\cos\varphi \; \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}h + (3R^2\sin^2\varphi + Rh\cos\varphi) \cdot (-R\sin\varphi)\mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}\varphi = \\
&= \left[2R^2\cos^2\varphi + 3R^3\sin^3\varphi + R^2h\cos\varphi\sin\varphi\right]\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}h
\end{aligned}$$

Zbývá provést integraci:

$$\int_{\mathcal{S}} \omega = \int_{\langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,H\rangle} \mathcal{S}^*\omega = \int_0^{2\pi}\int_0^H \left[R^2(1 + \cos 2\varphi) + 3R^3\sin^3\varphi + \frac{R^2h}{2}\sin 2\varphi\right]\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}h = 2\pi R^2 H$$

Další možnost, jak provést výpočet, je založena na Stokesově vztahu:

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \omega = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\omega$$

Plocha $\mathcal{S}$ v předchozím výpočtu sice netvoří celou hranici – plášť válce, ale protože tok podstavami je nulový, je možné napsat $\int_{\mathcal{S}} \omega = \int_{\partial\mathcal{V}} \omega$. Stačí proto vypočítat integrál $\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\omega$. Vnější derivace formy ω je rovna:

$$\mathrm{d}\omega = (2 + 6y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

Integrovat se bude přes celý válec, jeho parametrizace je $\mathcal{V}(x, y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), r \in \langle 0, R\rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle, z \in \langle 0, H\rangle$.

Inverzní obraz vypočteme takto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^*\mathrm{d}\omega &= [2 + 6(y \circ \mathcal{V})]\mathrm{d}(x \circ \mathcal{V}) \wedge \mathrm{d}(y \circ \mathcal{V}) \wedge \mathrm{d}(z \circ \mathcal{V}) = \\
&= (2 + 6r\sin\varphi)(\tfrac{\partial x}{\partial r}\mathrm{d}r + \tfrac{\partial x}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \tfrac{\partial x}{\partial z}\mathrm{d}z) \wedge (\tfrac{\partial y}{\partial r}\mathrm{d}r + \tfrac{\partial y}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \tfrac{\partial y}{\partial z}\mathrm{d}z) \wedge (\tfrac{\partial z}{\partial r}\mathrm{d}r + \tfrac{\partial z}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \tfrac{\partial z}{\partial z}\mathrm{d}z) = \\
&= (2 + 6r\sin\varphi)(\cos\varphi\mathrm{d}r - r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi) \wedge (\sin\varphi\mathrm{d}r + r\cos\varphi\mathrm{d}\varphi) \wedge (\mathrm{d}z) = \\
&= (2 + 6r\sin\varphi)r\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Integrál je pak vypočten takto:

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\omega = \int_{\langle 0,R\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,H\rangle} \mathcal{V}^*\mathrm{d}\omega = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^H \left[2r + 6r^2\sin\varphi\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = 2\pi R^2 H$$

To je stejný výsledek, jako v předchozím postupu.

12. domácí úkol do cvičení z integrování forem

Tomáš Záležák

19. Je za úkol vypočítat střed hmotnosti (těžiště) půloblouku cykloidy, $\mathcal{C}(x,y) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t)), t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Těžiště se souřadnicemi $[x_T, y_T]$ se vypočítá takto ($\overline{\omega}_0$ představuje délkový element, tady je to 1-forma $\overline{\omega}_0 = f^1$):

$$x_T = \frac{\int_{\mathcal{C}} x\overline{\omega}_0}{\int_{\mathcal{C}} \overline{\omega}_0} = \frac{\int_{\langle 0,\pi\rangle} \mathcal{C}^*(x\overline{\omega}_0)}{\int_{\langle 0,\pi\rangle} \mathcal{C}^*\overline{\omega}_0)} = \frac{\int_{\langle 0,\pi\rangle} (x \circ \mathcal{C})\mathcal{C}^*\overline{\omega}_0}{\int_{\langle 0,\pi\rangle} \mathcal{C}^*\overline{\omega}_0)} = \frac{\int_{\langle 0,\pi\rangle} (x \circ \mathcal{C})\sqrt{\det G}}{\int_{\langle 0,\pi\rangle} \sqrt{\det G}}$$

Souřadnice y_T se vypočítá obdobně. G je "matice skalárního součinu" obsahující jedinou složku $\langle \vec{f_1} | \vec{f_1} \rangle$, kde $\vec{f_1}$ je tečný vektor ve směru růstu parametru t, tedy

$$\vec{t_1} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)$$

Z toho plyne, že integrály pro výpočet těžiště budou mít tuto podobu:

$$x_T = \frac{\int_0^\pi (x \circ \mathcal{C})\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\mathrm{d}t}{\int_0^\pi \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\mathrm{d}t}, y_T = \frac{\int_0^\pi (x \circ \mathcal{C})\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\mathrm{d}t}{\int_0^\pi \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\mathrm{d}t}$$

Následuje vlastní výpočet:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\mathrm{d}t &= \int_0^\pi \sqrt{(a - a\cos t)^2 + (a \sin t)^2}\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t = \\
&= 2a \int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = 4a\left[\cos\frac{t}{2}\right]_\pi^0 = 4a \\
\int_0^\pi a(t - \sin t)\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t &= \sqrt{2}a^2 \int_0^\pi \left(\sqrt{2}t\sin\frac{t}{2} - \sin t\sqrt{1-\cos t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}a^2\left[-2\sqrt{2}t\cos\frac{t}{2} + 4\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} - \frac{2}{3}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^\pi = \frac{16}{3}a^2 \\
\int_0^\pi a(1-\cos t)\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t &= \sqrt{2}a^2\int_0^\pi 2\sqrt{2}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t = 8a^2\left[\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]_\pi^0 = \frac{16}{3}a^2
\end{aligned}$$

Z toho dostaneme $x_T = \dfrac{\frac{16}{3}a^2}{4a} = \dfrac{4}{3}a; y_T = \dfrac{\frac{8}{3}a^2}{4a} = \dfrac{4}{3}a$

20. Má být vypočítán obsah parabolické stěny takovéhoto tělesa: $y = \frac{3}{8}x^2, x = 0, z = 0, z = x, y = 6$.

Protože je potřeba spočítat jen plochu parabolické stěny, stačí vypočítat křivkový integrál. Křivka $\mathcal{C}$, po níž se integruje, má parametrizaci $\mathcal{C}(x,y) = (x, \frac{3}{8}x^2), x \in \langle 0, 4 \rangle$, forma $\overline{\omega}_0$ představuje stejný délkový element, jako v předchozí úloze. Integrovaná funkce F je rovna $F(x) = x$. Dostaneme stejný způsob výpočtu:

$$\int_{\mathcal{C}} F\overline{\omega}_0 = \int_0^4 x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x = \int_0^4 x\sqrt{1 + \frac{9}{16}x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 1 + \frac{9}{16}x^2 = t \\ x\mathrm{d}x = \frac{8}{9}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{8}{9}\int_1^{10}\sqrt{t} = \frac{8}{9}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10} = \frac{16}{27}\left[10\sqrt{10} - 1\right]$$