

# Zápočtové příklady do kmitů, vln a optiky

Tomáš Zálezák

## První část

### 1. Popis numerického řešení první úlohy.

Program má najít časovou závislost výchylky tlumených anharmonických kmitů s vratnou silou  $F_v(x) = -kx(1 + \alpha x^2)$  a tlumením  $F_o(x) = -\beta\dot{x}$ . Pohybová rovnice má tedy tvar:

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx(1 + \alpha x^2)$$

Pokud je  $\alpha = 0$ , lze rovnici rychleji vyřešit analyticky. Jinak je dobré použít numerické řešení. Výchylku lze vyjádřit jako prozatím neznámou funkci času, tj.  $x = x(t)$ . Obdobně lze vyjádřit rychlost  $\dot{x} = v = v(t)$ . Lze vytvořit Taylorův rozvoj  $x(t)$  kolem nuly:

$$x(\Delta t) = x(0) + \dot{x}(0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}(0)(\Delta t)^2 + \dots$$

Víme, že  $\dot{x}(0)$  označuje rychlost, tedy  $v(0)$ . Další člen,  $\ddot{x}(0)$  je zrychlení, tedy podíl síly a hmotnosti  $\frac{1}{2}F(x(0))/m$ . O třetí derivaci z rovnice nic nezjistíme, musí tak stačit rozvoj do druhého řádu včetně. Po dosazení tak dostaneme

$$x(\Delta t) \approx x(0) + v(0)\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2m}F(x(0))$$

Taylorův rozvoj rychlosti by tímto způsobem provést šlo také, ale skončil by na prvním řádu ze stejného důvodu. To lze ale obejít pomocí *krátkého* časového úseku  $\Delta t$  a polohy by bylo možné vyjádřit rychlost, ale ještě je k tomu potřeba zjistit, jak vypadá poloha  $v$  na počátku vyjádřená pomocí polohy  $x$  v čase  $\Delta t$ . Opět je vhodné použít Taylorův rozvoj, jako je ten předchozí

$$x(0) \approx x(\Delta t) - v(\Delta t)\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2m}F(x(\Delta t))$$

Z tohoto rozvoje lze již získat vztah pro rychlost:

$$v(\Delta t) \approx \frac{x(\Delta t) - x(0)}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2m}F(x(\Delta t))$$

Z prvního rozvoje lze dosadit  $x(\Delta t) - x(0) = \Delta t v(0) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 F(x(0))/m$ :

$$v(\Delta t) \approx v(0) + \frac{\Delta t}{2m}[F(x(0)) + F(x(\Delta t))]$$

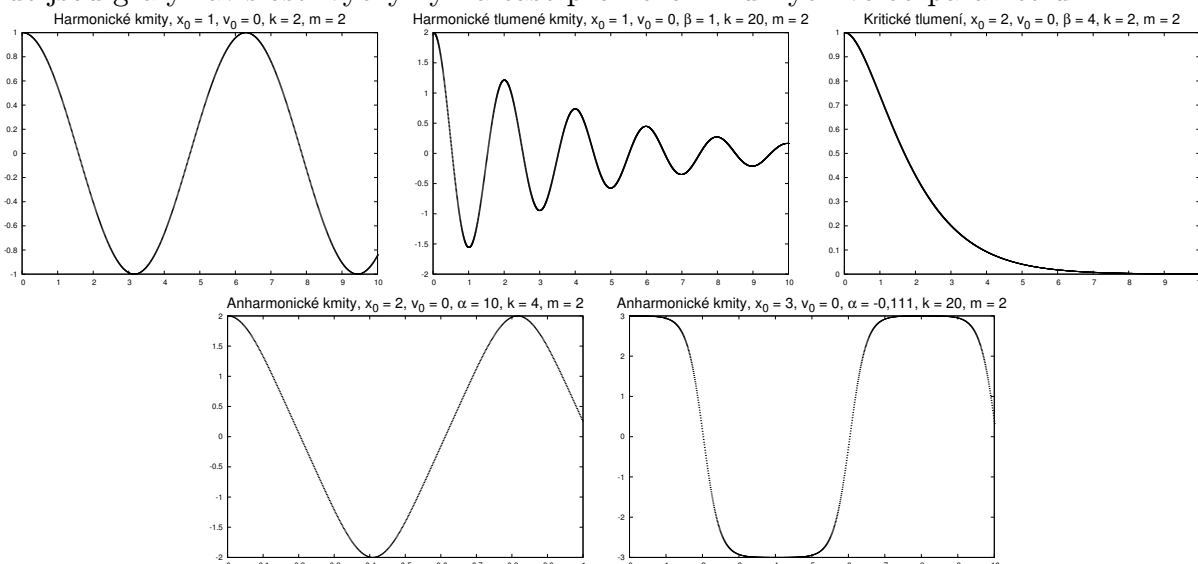
Teď jsou již odvozeny oba vztahy pro polohu i rychlost, i když jen s přesností do 2. řádu:

$$x(\Delta t) \approx x(0) + v(0)\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2m}F(x(0))$$

$$v(\Delta t) \approx v(0) + \frac{\Delta t}{2m}[F(x(0)) + F(x(\Delta t))]$$

Tomuto se říká Verletův rychlostní algoritmus a stačí jej přímo v této podobě obalit cyklem s vhodným krokem  $\Delta t$ . Program je napsán v Javě a i s jednoduchým apletem je na adrese [http://physics.muni.cz/~zalezak/kmity\\_aplet.html](http://physics.muni.cz/~zalezak/kmity_aplet.html)

Zde jsou grafy závislostí výchylky na čase pro několik různých voleb parametrů:



2. Seismometr zaznamenává kmity, které pociťuje, bude vhodné použít neinerciální pohled. Kmity povrchu jsou dány vztahem  $H \cos \omega t$ , odpovídající síla tak bude mít tvar  $m \frac{d^2}{dt^2}(H \cos \omega t) = -mH\omega^2 \cos \omega t$ . Protože v rovnici půjde o setrvačnou sílu, bude znaménko opačné:

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx + \omega^2 \cos \omega t$$

V rovnici je hmotnost  $m$ , konstanta útlumu  $\beta$  a tuhost pružiny  $k$ . Aby byly použity konstanty ze zadání, lze ji přepsat s hodnotami  $\gamma = \beta/m$  a  $\omega_0^2 = k/m$ :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega^2 H \cos \omega t$$

Jelikož je pohyb hmoty kriticky tlumený, není řešení homogenní diferenciální rovnice  $x = Ke^{-(\gamma/2)t}$  podstatné, z výpočtu ale plyne, že  $\gamma = 2\omega_0$ , což se bude hodit.

Dále je potřeba určit partikulární řešení diferenciální rovnice, bude mít zřejmě tvar  $x_P = C \cos \omega t + D \sin \omega t$ . Pak platí  $\dot{x}_P = \omega D \cos \omega t - \omega C \sin \omega t$  a  $\ddot{x}_P = -\omega^2 x_P$ . Po dosazení lze určit  $C, D$  metodou neurčitých koeficientů:

$$\cos \omega t : -\omega^2 C + \gamma \omega D + \omega_0^2 C = \omega^2 H$$

$$\sin \omega t : -\omega^2 D - \gamma \omega C + \omega_0^2 D = 0$$

Z toho dostaneme:

$$D = C \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\omega^2 H = C \left[ (\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{(\gamma \omega)^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$$

$$C = \frac{\omega^2 H (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}$$

Zápis partikulárního řešení lze změnit:

$$x_P = C \cos \omega t + D \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Potom označuje  $A$  amplitudu a platí pro ni  $A = \sqrt{C^2 + D^2}$  a  $\varphi_0$  počáteční fázi ( $\varphi_0 = \arctg A/B$ ). Pro amplitudu potom platí vztah:

$$A = \sqrt{C^2 + D^2} = C \sqrt{1 + D^2} = \frac{\omega^2 H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}}$$

V zadání je uveden vztah  $A/H = \frac{\omega}{2\omega_0} \sqrt{R(\omega)}$ , kde  $R(\omega) = \gamma^2 \omega^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]$ . Po dosazení vyjde:

$$\frac{A}{H} = \frac{\gamma \omega^2}{2\omega_0 \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}}$$

Od odvozeného vztahu se ten v zadání liší jen členem  $\gamma/(2\omega_0)$ . Protože ale platí  $\gamma = 2\omega_0$  – jde o kritické tlumení, jsou si oba vztahy rovny.

3. Protože všechny pružiny mají stejnou příčnou tuhost  $k$ , kuličky stejnou hmotnost  $m$  a soustava je souměrná, tak budou všechny pohybové rovnice kuliček stejného tvaru. Nejprve bude odvozena rovnice pro jednu kuličku. Označme kuličky číslicemi 1, 2, 3, 4 po směru hodinových ručiček počínaje tou, která je na náčrtku vlevo nahoře. Je-li tato vychýlena, tak je vracena do původní polohy dvěma pružinami připevněnými k okraji (síla  $-2kx_1$ ), potom na ni působí dvě pružiny spojující ji s dalšími dvěma kuličkami, ty však mohou být vychýleny (síly  $-k(x_1 - x_2)$  a  $-k(x_1 - x_4)$ ). Dohromady z toho vyjde

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -2kx_1 - k(x_1 - x_2) - k(x_1 - x_4) \\ m\ddot{x}_1 &= -k(4x_1 - x_2 - x_4) \end{aligned}$$

Pro všechny kuličky tak vyjde soustava čtyř spřažených diferenciálních rovnic druhého řádu:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{k}{m}(4x_1 - x_2 - x_4) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{m}(4x_2 - x_1 - x_3) &= 0 \\ \ddot{x}_3 + \frac{k}{m}(4x_3 - x_2 - x_4) &= 0 \\ \ddot{x}_4 + \frac{k}{m}(4x_4 - x_1 - x_3) &= 0 \end{aligned}$$

U těchto rovnic lze předpokládat řešení ve tvaru  $x_i = A_i e^{\lambda t}$ . Po dosazení tak vznikne soustava:

$$\begin{aligned} \lambda^2 A_1 + \frac{k}{m}(4A_1 - A_2 - A_4) &= 0 \\ \lambda^2 A_2 + \frac{k}{m}(4A_2 - A_1 - A_3) &= 0 \\ \lambda^2 A_3 + \frac{k}{m}(4A_3 - A_2 - A_4) &= 0 \\ \lambda^2 A_4 + \frac{k}{m}(4A_4 - A_1 - A_3) &= 0 \end{aligned}$$

To je soustava homogenních lineárních rovnic, její řešení je zřejmě  $A_i = 0$ , to však odpovídá klidovému stavu soustavy. Pokud by však některé rovnice byly lineárně závislé, objevila by se i jiná řešení. Determinant matice vytvořené z koeficientů rovnic musí být roven nule:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \frac{4k}{m} & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda^2 + \frac{4k}{m} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda^2 + \frac{4k}{m} & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda^2 + \frac{4k}{m} \end{vmatrix}$$

Pro  $\lambda^2 = -\frac{4k}{m}$ , tj. pro  $\lambda = i\omega_1$ , kde  $\omega_1 = 2\sqrt{k/m}$  je determinant nulový, známe tak jednu vlastní frekvenci. Vyřešením soustavy dostaneme vztahy  $A_1 = -A_3$  a  $A_2 = -A_4$ . Podle označení uvedeného na začátku tedy půjde o kmity protilehlých hran s opačnou fází a s frekvencí  $\omega_1 = 2\sqrt{k/m}$ . Zbývá najít ostatní kořeny  $\lambda$ . Lze pro přehlednost nahradit  $\lambda^2 + \frac{4k}{m} = \chi$  a Gaussovou eliminací najít vhodné hodnoty  $\chi$  (pro  $\chi \neq 0$ ):

$$0 = \begin{vmatrix} \chi & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \chi & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \chi & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \chi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \chi & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \chi & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \chi^2 - 4 \end{vmatrix}$$

Z toho plyne, že  $\chi = \pm 2$ , tj.  $\lambda = \sqrt{\pm 2 - 4k/m}$ . Dostaneme tak další vlastní frekvence  $\omega_2 = \sqrt{4k/m + 2}$  pro  $\lambda = -2$  a  $\omega_3 = \sqrt{4k/m - 2}$  pro  $\lambda = 2$  (za předpokladu, že  $4k/m > 2$ ). Vyřešením soustavy pro  $\lambda = -2$  dostaneme, že první a třetí kulička kmitá v protifázi s druhou a čtvrtou.

$$\begin{pmatrix} = 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vyřešením soustavy pro  $\lambda = 2$  dostaneme, že kuličky kmitají ve fázi.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Funkce na obrázku znázorňuje počáteční výchylku. Lze ji zapsat takto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x & \Leftrightarrow x \in \langle 0; \frac{L}{2} \rangle \\ \frac{2h}{L}(L-x) & \Leftrightarrow x \in (\frac{L}{2}; L) \end{cases}$$

Zbylé hodnoty získáme  $2L$ -periodickým rozšířením. Fourierova řada této funkce má jen sinové členy (je lichá) a platí pro ně:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{\pi}{L} nx \, dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{\pi}{L} nx \, dx = \\ &= \frac{2}{L} \left[ \int_0^{L/2} \frac{2h}{L} x \sin \frac{\pi}{L} nx \, dx + \int_{L/2}^L \frac{2h}{L} (L-x) \sin \frac{\pi}{L} nx \, dx \right] \\ &= \frac{8h^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Fourierova řada pak vypadá takto:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{8h^2}{(2n+1)^2\pi^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{L} x$$

Funkce popisující časový vývoj struny:

$$u(x, t) = f(x - ct) + f(x + ct)$$

5. Pro gravitační vlny na hluboké vodě je dán disperzní vztah  $\omega = \sqrt{gk}$ . Pro vlnčet  $k$  platí  $k = 2\pi/\lambda$ . Vlny se ke břehu blíží rychlostí  $v_g$  (grupovou)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Vzdálenost  $L$  urazí za dobu  $\Delta t = L/v_g$ :

$$\Delta t = 2L \sqrt{\frac{2\pi}{g\lambda}}$$

Interval mezi příchody dvou po sobě následujících vln je  $\lambda/v_f$ , kde  $v_f = \omega/k = \sqrt{g/k}$  je fázová rychlost.

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$$

Po dosazení  $L = 100$  km a  $\lambda = 20$  m dostaneme  $T \doteq 3,58$  s a  $\Delta t = 9$  h 56 m 31 s  $\approx 10$  h.

## Druhá část

1. Podložka má index lomu  $n$ , na ní je tenká vrstva s tloušťkou  $d$  a indexem lomu  $n_1$ , nad ní je vzduch s indexem lomu 1. Platí  $1 < n_1 < n$ .

Při průchodu rozhraním  $n_1|n_2$  je amplituda odražené vlny úměrná poměru  $r = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ . Amplituda prošlé vlny je úměrná poměru  $t = 2n_1/(n_1 + n_2)$  a platí  $r + 1 = t$ . Na vrstvu dopadá světelná vlna s amplitudou  $E_0$ . Část se odrazí, lze ji označit  $E_1$ :

$$E_1 = \frac{1-n_1}{1+n_1} E_0$$

Část projde, tu je možné označit  $E_{01}$ :

$$E_{01} = \frac{2}{1+n_1} E_0$$

Prošlá část dorazí na spodní rozhraní mezi vrstvou a podložkou a odrazí se tam:

$$E_2 = \frac{n_1-n}{n_1+n} E_{01}$$

Dole odražená vlna dorazí znovu na horní rozhraní mezi vrstvou a vzduchem, část projde ven:

$$E_{21} = \frac{2n_1}{n_1+n} E_2$$

Část se ale odrazí:

$$E_{11} = \frac{n_1-1}{n_1+1} E_2$$

Dorazí zase ke spodní vrstvě, kde se odrazí:

$$E_{22} = \frac{n_1-n}{n_1+n} E_{11}$$

Vrátí se na horní rozhraní, část projde ven:

$$E_{221} = \frac{2}{n_1+n} E_{22}$$

Takto to pokračuje do nekonečna. Výsledná amplituda odražené vlny je rovna:

$$E_R = E_1 + E_{21} + E_{221} + \dots + E_{22\dots 21} + \dots$$

$$E_R = E_0 \left[ \frac{1-n_1}{1+n_1} + \frac{2n_1}{1+n_1} \frac{n_1-n}{n_1+n} \frac{2}{n_1+n} + \frac{2n_1}{1+n_1} \frac{n_1-n}{n_1+n} \frac{n_1-1}{n_1+1} \frac{n_1-n}{n_1+n} \frac{2}{n_1+n} + \frac{2n_1}{1+n_1} \frac{n_1-n}{n_1+n} \left( \frac{n_1-1}{n_1+1} \frac{n_1-n}{n_1+n} \right)^2 \frac{2}{n_1+n} + \dots \right]$$

$$E_R = E_0 \left[ \frac{1-n_1}{1+n_1} + \frac{2n_1}{1+n_1} \frac{n_1-n}{n_1+n} \frac{2}{n_1+n} + \frac{2n_1}{1+n_1} \frac{n_1-n}{n_1+n} \left( \frac{2n_1(n_1+1)}{(n_1+1)(n_1+n)} \right) \right]$$

Při odrazu na spodním rozhraní se navíc mění fáze světelných vln na opačnou, takže dochází k interferencím, pokud  $2n_1d = m\lambda/2$ , kde  $m \in \mathbb{N}$  a  $\lambda$  je vlnová délka světla.

K určení tloušťky vrstvy je možné využít právě interference destruktivní interference. K určení odrazivosti je možné využít monochromatického světla, u něhož nedojde k destruktivní interferenci. Za zmínku stojí, že měření se bude týkat ne amplitud, pro které jsou tu odvozeny vztahy, ale intenzit. Naměřené hodnoty se zpracují na počítači a zjištěné hodnoty se proloží křivkou, která bude dána vztahem pro intenzitu. Koeficienty se určí třeba metodou nejmenších čtverců právě prostřednictvím počítače.

2. Difrakční stínítko má stejné obdélníkové otvory s šířkou  $a_1$  a výškou  $a_2$ . Na šířku jich je  $N_1$  a na výšku  $N_2$ . Středů mají polohu  $\vec{R} = n_1\vec{d}_1 + n_2\vec{d}_2$ ,  $d_1 \parallel x$ ,  $d_2 \parallel y$ . kde  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ ,  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ ,  $n_1 < N_1$ ,  $n_2 < N_2$ . Souřadnice na stínítku jsou  $[\xi, \eta]$ ,  $A_D$  je amplituda vlny.

Difrakce na jednom obdélníku vypadá takto:

$$\begin{aligned} \psi_{n_1, n_2}(\xi, \eta) &= A_D \int_{-\frac{a_2}{2}}^{+\frac{a_2}{2}} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{+\frac{a_1}{2}} e^{ik[(n_1d_1+x)\xi + (n_2d_2+y)\eta]/r} dx dy = \\ &= A_D e^{ik[n_1d_1\xi + n_2d_2\eta]/r} \cdot \left[ \frac{e^{ik\xi x/r}}{ik\xi/r} \right]_{-\frac{a_1}{2}}^{+\frac{a_1}{2}} \cdot \left[ \frac{e^{ik\eta y/r}}{ik\eta/r} \right]_{-\frac{a_2}{2}}^{+\frac{a_2}{2}} = \\ &= A_D e^{ikn_1d_1\xi/r} e^{ikn_2d_2\eta/r} \cdot \frac{a_1a_2}{4} \cdot \frac{\sin[k\xi a_1/(2r)]}{k\xi a_1/(2r)} \cdot \frac{\sin[k\eta a_2/(2r)]}{k\eta a_2/(2r)} \end{aligned}$$

Pro všechny obdélníky vyjde tento součet (se značením  $\sin(x)/x =: \text{sinc}(x)$ ):

$$\begin{aligned} \psi(\xi, \eta) &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \psi_{n_1, n_2}(\xi, \eta) = \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} A_D \frac{a_1a_2}{4} e^{ikn_1d_1\xi/r} e^{ikn_2d_2\eta/r} \cdot \text{sinc} \frac{k\xi a_1}{2r} \text{sinc} \frac{k\eta a_2}{2r} \end{aligned}$$

Jediné, co se v jednotlivých sčítancích mění, jsou exponenciální členy, jde tedy o součin

dvou geometrických posloupností násobený konstantou (pozn.:  $s_N = \sum_{n=0}^{N-1} q^n$ ,  $(q-1)s_N = q^N - 1 \Rightarrow s_N = (q^N - 1)/(q - 1)$ ):

$$\psi(\xi, \eta) = A_D \frac{a_1 a_2}{4} \overbrace{\frac{e^{ikN_1 d_1 \xi/r} - 1}{e^{ikd_1 \xi/r} - 1} \frac{e^{ikN_2 d_2 \eta/r} - 1}{e^{ikd_2 \eta/r} - 1}}^{\mathcal{G}} \overbrace{\operatorname{sinc} \frac{k\xi a_1}{2r} \operatorname{sinc} \frac{k\eta a_2}{2r}}^{\mathcal{S}} = A_D \cdot \mathcal{G} \cdot \mathcal{S}$$

V závislosti vystupuje skutečně součin činitele závislého na uspořádání otvorů (geometrický faktor  $\mathcal{G}$ ) a činitele závislého na tvaru otvorů (strukturní faktor  $\mathcal{S}$ ).

Ještě zbývá určit intenzitu:  $I = \psi\psi^*$ . Pokud platí  $z = e^{i\varphi}$ , pak  $zz^* = 1$ . Pokud platí  $z = e^{i\varphi} - 1$ , pak  $zz^* = [(\cos \varphi - 1) + i \sin \varphi][(\cos \varphi - 1) - i \sin \varphi] = 2(1 - \cos \varphi)$ .

Z toho dostaneme:

$$I(\xi, \eta) = 4 [1 - \cos(kN_1 d_1 \xi/r)] [1 \cos(kN_2 d_2 \eta/r)] \left[ A_D \frac{a_1 a_2}{4} \operatorname{sinc} \frac{k\xi a_1}{2r} \operatorname{sinc} \frac{k\eta a_2}{2r} \right]^2$$

I u intenzity je patrný součin určitého geometrického a strukturního faktoru.

**3.** Newtonův dalekohled se skládá z dutého parabolického zrcadla, rovinného zrcátka a okuláru tvořeného spojkou. Ohnisko zrcadla splývá s přílehlým ohniskem okuláru.

Keplerův dalekohled se skládá ze dvou spojek, jejichž přílehlá ohniska splývají.

Galileiho dalekohled má jako objektiv spojku a jako okulár rozptylku. Od objektivu vzdálenější ohnisko rozptylky je umístěno do ohniska objektivu.

Je-li Keplerův dalekohled zaostřen tak, že je v něm vidět ostrý obraz Měsíce, vstupují paprsky do dalekohledu rovnoběžně a paprsky projdou ohniskem do okuláru a vystupují opět rovnoběžně. Je-li za okulárem stínítka, obraz vznikne jen tehdy, je-li okulár oddálen od objektivu o vzdálenost  $\Delta x$ . Pak platí tato zobrazovací rovnice, kde poloha vzoru je  $a = -(f_{ok} + \Delta x)$  a obrazu  $a' = d - \Delta x$  (byla použita znaménková konvence taková, že vzdálenosti vpravo od čočky jsou kladné, vlevo záporné, Měsíc je v tomto případě na levé straně, obrazové ohnisko je vpravo):

$$\frac{1}{d - \Delta x} + \frac{1}{f_{ok} + \Delta x} = \frac{1}{f_{ok}}$$

Po úpravě dostaneme tuto kvadratickou rovnici:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta x^2 + \Delta x(f_{ok} - d) + f_{ok}^2 \\ \Delta x_1 &= 0, 29 \text{ cm} \\ \Delta x_2 &= 13, 71 \text{ cm} \end{aligned}$$

Úhlová velikost Měsíce na obloze je přibližně  $\alpha = 31' \approx 0, 009$  rad. Paprsky z okraje Měsíce projdou středem objektivu beze změny a ve vzdálenosti  $f_{ob}$  vytvoří vzor pro zobrazení okulárem o velikosti  $z = \alpha \cdot f_{ob}$ . Velikost obrazu potom je:

$$z' = z \cdot \frac{d - \Delta x}{f_{ok} + \Delta x} = \alpha \cdot f_{ob} \cdot \frac{d - \Delta x}{f_{ok} + \Delta x}$$

Po dosažení  $\Delta x_1$  dostaneme  $z'_1 = 1, 86 \text{ cm}$ , pro  $\Delta x_2$  pak  $z'_2 = 0, 04 \text{ cm}$ . V obou případech je obraz na stínítku převrácen jen ve svislé rovině, hledíme-li na něj ze strany dalekohledu.

U Galileiova dalekohledu je situace podobná, paprsky vstupují rovnoběžně do objektivu, tam se lámou a sbíhají se, na rozptylce se opět stanou rovnoběžnými. Aby bylo možné použít tento dalekohled k promítání, je potřeba rozptylku oddálit od objektivu o vzdálenost  $\Delta x$ . Pak platí zobrazovací rovnice (je opět dodržena stejná znaménková konvence, Měsíc je vlevo, obrazové ohnisko vpravo, obraz i vzor také obraz však vlevo):

$$\frac{1}{d - \Delta x} - \frac{1}{f_{ok} - \Delta x} = -\frac{1}{f}$$

Z toho vznikne opět kvadratická rovnice:

$$\Delta \Delta x^2 - \Delta x(f_{ok} + d) - f_{ok}^2 = 0$$

Vyjdou tato řešení:  $\Delta x_1 = 17, 77 \text{ cm}$  a  $\Delta x_2 = 0, 23 \text{ cm}$ . První vzdálenost nemá význam, protože by tak byla rozptylka až za stínítkem. Velikost obrazu Měsíce vyjde podle stejného vztahu jako v předchozím případě  $z' = 0, 13 \text{ cm}$ .

4.

Při průchodu slunečních paprsků vodními kapkami se paprsky uvnitř kapek mnohonásobně odráží. Duha je nejlépe viditelná při jedné odrazu uvnitř kapky.

Pokud dopadá paprsek na kapku, tak se nejen odráží, ale i láme a platí pro úhel dopadu  $\alpha$  a úhel lomu  $\beta$  Snellův zákon ( $n_0 = 1$  - index lomu vzduchu,  $n$  index lomu vody):

$$n_0 \sin \alpha = n \sin \beta$$

Po odrazu se paprsek při opouštění kapky láme a vystupuje opět pod úhlem  $\alpha$ . Graficky lze odvodit, že úhel, který svírá původní paprsek s paprskem lomeným po prvním odrazu, je roven

$$\gamma = 4\beta - 2\alpha = 4 \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} - 2\alpha$$

Odchylna světelného paprsku je  $\delta = 2\pi - \gamma$  a je minimální právě tehdy, když je  $\gamma$  maximální.

Když závisí  $\gamma$  na úhlu dopadu  $\alpha$ , musí platit:

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} 4/\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} \cdot \frac{\cos \alpha}{n} &= 0 \\ 2 \cos \alpha &= \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \\ 4 \cos^2 \alpha &= n^2 - \sin^2 \alpha \\ \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} &= \alpha \end{aligned}$$

Pro fialové světlo je index lomu vody  $n_f = 1,343$ , pro červené  $n_\varepsilon = 1,329$ . Z toho vyjde  $\alpha_f = 58^\circ 50'$  a  $\alpha_\varepsilon = 59^\circ 39'$ . Úhlový poloměr duhy je dán úhlem mezi paprskem přicházejícím z kapky a paprsky, které vrhají na zem stín pozorovatele. To je střídavý úhel s úhlem  $\gamma$ , takže stačí tento úhel dopočítat. Pro červenou vyjde  $\gamma_\varepsilon = 42^\circ 40'$ , pro fialovou  $\gamma_f = 40^\circ 39'$ .