Zápočtové příklady do cvičení z úvodu do fyziky plazmatu

Tomáš Záležák

Příklad 20.2b: Jaký je vztah mezi diferenciálním účinným průřezem v soustavě těžišťové a laboratorní? Hmotmosti částic jsou m, m_1, částice m_1 byla před srážkou v klidu. Rozptylové úhly jsou označeny χ a χ_L v těžišťové a laboratorní soustavě.

Řešení

Diferenciální účinný průřez v laboratorní soustavě je vyjádřen takto:

$$\sigma_L(\chi_L) = \frac{b}{\sin\chi_L}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi_L}\right|$$

Na cvičení byl odvozen vztah mezi rozptylovými úhly v obou soustavách pro tento případ:

$$\operatorname{tg}\chi_L = \frac{\sin\chi}{\frac{m}{m_1}+\cos\chi}$$

Lze jej užít k vyjádření vztahu mezi účinnými průžezy.

$$\sigma(\chi) = \frac{b}{\sin\chi_L}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi}\right|$$

Nejprve bude vyjádřen $\sin\chi$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2\chi_L &= \frac{\sin^2\chi_L}{\cos^2\chi_L} = \frac{\sin^2\chi_L}{1-\sin^2\chi_L} \Rightarrow \\
\sin\chi_L &= \frac{\operatorname{tg}\chi_L}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\chi_L}} = \frac{\sin\chi}{\frac{m}{m_1}+\cos\chi}\left[\frac{\left(\frac{m}{m_1}\right)^2+2\frac{m}{m_1}\cos\chi+1}{\left(\frac{m}{m_1}+\cos\chi\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sin\chi}{\sqrt{\left(\frac{m}{m_1}\right)^2+2\frac{m}{m_1}\cos\chi+1}}
\end{aligned}$$

Nyní lze vypočítat derivaci $\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi_L}$. Protože je třeba vyjádřit χ pomocí χ_L, tedy $\chi(\chi_L)$, bude platit

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi_L} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi_L} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\chi_L}$$

Vyjádříme derivaci $\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\chi_L}$ diferencováním úvodního vztahu pro χ_L a χ:

$$\frac{\mathrm{d}\chi_L}{\cos^2\chi_L} = \frac{\cos\chi(\cos\chi+\frac{m}{m_1})+\sin^2\chi}{\left(\frac{m}{m_1}+\cos\chi\right)^2}\mathrm{d}\chi$$

Ještě je třeba vyjádřit $\cos\chi_L$ obdobně, jako výše $\sin\chi_L$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2\chi_L &= \frac{\sin^2\chi_L}{\cos^2\chi_L} = \frac{1-\cos^2\chi_L}{\cos^2\chi_L} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\chi_L} = 1+\overset{2}{\operatorname{tg}}\chi_L \Rightarrow \\
\frac{1}{\cos^2\chi_L} &= \frac{\left(\frac{m}{m_1}\right)^2+2\frac{m}{m_1}\cos\chi+1}{\left(\frac{m}{m_1}+\cos\chi\right)^2}
\end{aligned}$$

Z toho dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\chi_L} = \frac{\left(\frac{m}{m_1}\right)^2+2\frac{m}{m_1}\cos\chi+1}{1+\frac{m}{m_1}\cos\chi}$$

Po dosazení vyjde:

$$\sigma(\chi_L) = \frac{\left[\left(\frac{m}{m_1}\right)^2+2\frac{m}{m_1}\cos\chi+1\right]^{\frac{3}{2}}}{1+\frac{m}{m_1}\cos\chi}\underbrace{\frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\chi}\right|}_{\sigma(\chi)}$$

Příklad 6.1b: Jaký je vztah pro absolutní teplotu plasmatu, je-li rozdělovací funkce dána vztahem:

$$f(\vec{v}) = \begin{cases} K_0 & \Leftrightarrow \quad |v_i| \leq v_0 \\ 0 & \Leftrightarrow \quad |v_i| > v_0 \end{cases}$$

Lze vyjít ze vztahu pro energii částice mající střední kvadratickou rychlost:

$$\frac{1}{2}m\langle\vec{v}\vec{v}\rangle = \frac{3}{2}kT$$

Je tedy třeba vypočítat střední kvadratickou rychlost:

$$\langle\vec{v}\vec{v}\rangle = \int_v (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) f(\vec{v}) \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z = \int_{-v_0}^{+v_0} \int_{-v_0}^{+v_0} \int_{-v_0}^{+v_0} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z =$$

$$\frac{1}{n} 3K_0 \left[\frac{v_x^3}{3}\right]_{-v_0}^{+v_0} [v_y]_{-v_0}^{v^0} [v_z]_{-v_0}^{v^0} = \frac{1}{n} 8 v_0^5 K_0$$

Ve vztahu je ještě hustota částic, pro niž platí

$$n = \int_v f(\vec{v}) \mathrm{d}^3 v = \int_{-v_0}^{+v_0} \int_{-v_0}^{+v_0} \int_{-v_0}^{+v_0} K_0 \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z = 8Kv_0^3$$

Tedy vyjde tato střední kvadratická rychlost:

$$\langle\vec{v}\vec{v}\rangle = v_0^2$$

Po vyjádření teploty dostaneme $T = \dfrac{m\langle\vec{v}\vec{v}\rangle}{3k} = \dfrac{mv_0^2}{3k}$.

Příklad 20.3a: Jaký je úhel rozptylu dvou částic, jejichž vzájemné silové působení je popsáno potenciálem

$$U(r) = -U_0 \mathrm{Y}(a-r), \quad \mathrm{Y}(x) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \quad x > 0 \\ 0 & \Leftrightarrow \quad x < 0 \end{cases}$$

Úhel rozptylu χ je vyjádřen integrálem

$$\chi(b,g) = \pi - 2\int_{r_m}^{\infty} \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu g^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}r$$

Parametr b vyjadřuje záměrnou vzdálenost, g vzájemnou rychlost.
Protože podle zadání je záměrná vzdálenost $b < a$, přiblíží se částice Při dosazení potenciálu je třeba integrační obor rozdělit, protože vzdálenost nejmenšího přiblížení $r_m < a$.
Tedy platí:

$$\chi = \pi - 2\left\{\int_{r_m}^{a} \frac{b}{r^2}\left[1 + \frac{2U_0}{\mu g^2} - \frac{b^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}r + \int_{a}^{\infty} \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}r\right\}$$

Druhý integrál se řeší takto:

$$\int_a^{\infty} \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{b^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}r = \left| \begin{array}{ccc} y & = & b/r \\ \mathrm{d}y & = & -b/r^2 \mathrm{d}r \end{array} \right| = \int_0^{b/a} \left[1 - y^2\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y = [\arcsin y]_0^{b/a} = \arcsin\frac{b}{a}$$

První integrál se s vyjádřením $p = \sqrt{1 + \frac{2U_0}{\mu g^2}}$ počítá tímto způsobem:

$$\int_{r_m}^{a} \frac{b}{r^2}\left[p^2 - \frac{b^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}r = \frac{b}{pr^2}\left[1 - \frac{b^2}{p^2 r^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}r = \left| \begin{array}{ccc} y & = & \frac{b}{pr} \\ \mathrm{d}y & = & -\frac{b}{pr^2}\mathrm{d}r \end{array} \right| =$$

$$\int_{\frac{b}{pa}}^{\frac{b}{pr_m}} \left[1 - y^2\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y = [\arcsin y]_{\frac{b}{pa}}^{\frac{b}{pr_m}} = \arcsin\frac{b}{pr_m} - \arcsin\frac{b}{pa}$$

V prvním integrálu vychází vzdálenost nejmenšího přiblížení. Tu lze určit ze vztahu

$$r_m = b\left[1 - \frac{2U(r_m)}{\mu g^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Potenciál ve vzdálenosti r_m přítomen je a rovná se $-U_0$. Po dosazení tedy vyjde $r_m = b/p$, což způsobí, že $\arcsin\frac{b}{pr_m} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.
Úhel rozptylu je tedy vyjádřen vztahem

$$\chi = 2\arcsin\frac{b}{pa} - 2\arcsin\frac{b}{a}$$