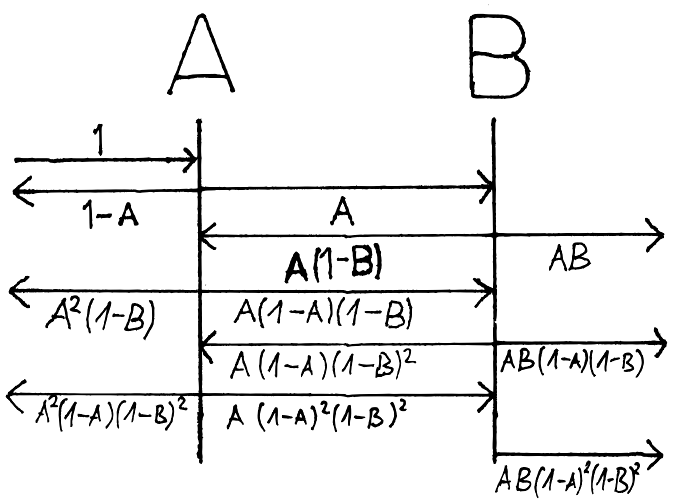
Jak prochází světlo soustavou částečně propustných zrcadel?

Když světlo prochází polopropustným zrcadlem, polovina světla projde a polovina se odrazí. Co se však stane, když takových zrcadel máme víc za sebou a když nebudou právě polopropustná? To už složitější. Pro jednoduchost se podívejme na případ, kdy jsou taková zrcadla za sebou jen dvě, první propouští světla A a druhé B. Čísla A a B jsou menší než jedna, zrcadla tedy odráží část světla $1 - A$ a $1 - B$.



Na první zrcadlo přichází světlo s intenzitou 1 a prochází část $1 \cdot A$, druhým zrcadlem pak projde $1 \cdot A \cdot B$. Na prvním zrcadle se odrazí část $1 - A$, na druhém $A \cdot (1 - B)$. Světlo odražené na druhém zrcadle dopadá zpět na první zrcadlo, kde projde A-násobek, tedy $A \cdot (1 - B) \cdot A = A^2(1 - B)$, část se odrazí, totiž $A \cdot (1 - B) \cdot (1 - A)$, a dopadne opět na druhé zrcadlo, kde část $A \cdot (1 - B) \cdot (1 - A) \cdot B$ projde, část se odrazí zpět a tak to jde pořád dál a dál. Při pohledu na obrázek je vidět, že zrcadlem projde tato část světla:

$$\mathcal{P}(A,B) = AB + AB(1-A)(1-B) + AB(1-A)^2(1-B)^2 + \cdots = AB\sum_{n=0}^{\infty}(1-A)^n(1-B)^n$$

Zde se objevuje geometrická řada a její součet je roven

$$\mathcal{P}(A,B) = AB\frac{1}{1-(1-A)(1-B)} = \frac{AB}{A+B-AB}$$

Část světla se odrazí:

$$\mathcal{O}(A,B) = 1-A+A^2(1-B)+A^2(1-A)(1-B)^2+\cdots = (1-A)+A^2(1-B)\sum_{n=0}^{\infty}(1-A)^n(1-B)^n$$

Součet je roven

$$\mathcal{O}(A,B) = (1-A)+\frac{A^2(1-B)}{A+B-AB} = \frac{A+B-AB-A^2-AB+A^2B+A^2-A^2B}{A+B-AB} = \frac{A+B-2AB}{A+B-AB}$$

Snadno lze ukázat, že součet odraženého a prošlého světla dá jedničku, to je takove malá zkouška správnosti:

$$\mathcal{O}(A,B)+\mathcal{P}(A,B) = \frac{A+B-2AB}{A+B-AB} + \frac{AB}{A+B-AB} = \frac{A+B-AB}{A+B-AB} = 1$$

Můžeme čerstvě odvozené vztahy vyzkoušet. Co se stane, když máme dvě polopropustná zrcadla? Potom je $A = B = 1/2$, po dosazení zjistíme, že $\mathcal{P}(A,B) = 1/3$ a $\mathcal{O}(A,B) = 2/3$. Takže dvěma polopropustnými zrcadly projde jen třetina světla, zatímco dvě třetiny se odrazí. A když budou zrcadla tři?

Pokud je zrcadel více, můžeme zkusit spočítat jejich propustnost vždy po dvojicích sousedních zrcadel. Když jsou zrcadla tři, tak první dvě zrcadla se chovají jako jedno třetinopropustné zrcadlo ($A = 1/3$), druhé je obyčejné polopropustné ($B = 1/2$). Když zkusíme dosadit tyto hodnoty, vyjde $\mathcal{P}(A, B) = 1/4$ a $\mathcal{O} = 3/4$. Je to správně? Zvolili jsme první zrcadlo jako třetinopropustné (vzniklé ze dvou polopropustných) a druhé (ve skutečnosti) třetí bylo popopropustné. Pokud to provedeme obráceně, dostaneme stejný výsledek.

$$\mathcal{P}(A, B) = \frac{AB}{A + B - AB} = \frac{BA}{B + A - BA} = \mathcal{P}(B, A), \quad \text{obdobně } \mathcal{O}(A, B) = \mathcal{O}(B, A)$$

Tak jsme dokázali, že na pořadí zrcadel výsledek nezávisí, tj. jsou *komutativní.*

Další otázka vyvstane, když budeme mít čtyři polopropustná zrcadla. Bude zřejmě jedno, jestli je převedeme na trojici zrcadel (jež vytvoří čtvrtpropustné zrcadlo) a jedno zrcadlo, nebo na jedno zrcadlo a trojici zrcadel, v obou případech nám vyjde pětinopropustné zrcadlo, $\mathcal{P} = 1/5, \mathcal{O} = 4/5$. Když soustavu převedeme na dvě dvojice polopropustných zrcadel, vyjde také $\mathcal{P} = 1/5, \mathcal{O} = 4/5$. Ukážeme, že to platí obecně.

Mějme čtyři zrcadla s propustnostmi A, B, C, D. Hledáme celkovou propustnost P. Sdružme zrcadla po dvou a označme propustnosti těchto dvojic po řadě $E = \mathcal{P}(A, B)$ a $F = \mathcal{P}(C, D)$. Pak $P = \mathcal{P}(E, F)$. Nyní zbývá jen dosadit do vzorců.

$$\begin{aligned} P &= \frac{EF}{E + F + EF} = \frac{\frac{ABCD}{(A+B+AB)(C+D+CD)}}{\frac{AB}{A+B+AB} + \frac{CD}{C+D+CD} + \frac{ABCD}{(A+B+AB)(C+D+CD)}} \\ &= \frac{ABCD}{ABC + ABD + ACD + BCD + 3ABCD} \end{aligned}$$

Seskupme nyní zrcadla tak, že poslední tři budou pohromadě s propustností $G = \mathcal{P}(B, F)$ a první A bude zvlášť. Hledejme nyní propustnost $P' = \mathcal{P}(A, G)$.

$$\begin{aligned} G &= \frac{BF}{B + F + BF} = \frac{\frac{BCD}{C+D+CD}}{B + \frac{CD}{C+D+CD} + \frac{BCD}{B+C+CD}} \\ &= \frac{BCD}{BC + BD + CD + 2BCD} \\ P' &= \frac{AG}{A + G + AG} = \frac{ABCD}{A + (1 + A)\frac{BCD}{BC+BD+CD+2BCD}} = \\ &= \frac{ABCD}{ABC + ABD + ACD + BCD + 3ABCD} \end{aligned}$$

Ukazuje se, že propustnost vyšla stejně, tedy $P = P'$. Stejným postupem bychom mohli seskupit první tři zrcadla a k nim přidat čtvrté a opět bychom dostali nějaké $P'' = P$. Dokázali jsme tak *asociativitu*, a to zcela obecnou, protože A, B, C, D mohou zastupovat libovolné soustavy zrcadel.

Nyní je na místě si položit otázku: „K čemu jsou tyto vztahy vlastně dobré?“ Můžeme pomocí nich ukázat, že řada propustných zrdacel odráží tím více světla, čím více těchto zrcadel je. Mějmě třeba polopropustná zrcadla. Jsou-li dvě, již víme, že $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$. Také víme, že $\mathcal{P}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Kolik je $\mathcal{P}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)$?

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{n + 1}$$

Tento vztah je rekurentní a říká, že n polopropustných zrcadel propustí $\frac{1}{n+1}$ světla a zbytek odrazí. Pokud tedy máme na sobě mnoho i třeba jen slabě odrážejících vrstev, neprojde jimi téměř žádné světlo a mnoho se ho odrazí. (Nějaké se také pohltí, což zde nebylo započteno. Stejně tak nebyly započteny interference.) Podobně lze vysvětlit to, že sníh odráží světlo (a jeví se bílý).

Předchozí vztahy nezahrnují interferenci. Pokud by byl výpočet proveden pro komplexní amplitudy a byla by zohledněna vlnová délka procházejícího světla, projevila by se. Zrcadlo nechť propouští z jedné strany amplitudu úměrnou p a odráží uměrnou o, z druhé strany obdobně – p', o'. Matice těchto součinitelů musí být unitární.

$$J = \begin{pmatrix} p & o \\ o' & p' \end{pmatrix}; \quad J^{-1} = J^{+}$$

Potom musí platit:

$$JJ^{+} = \mathrm{E} = J^{+}J \Rightarrow \begin{pmatrix} p & o \\ o' & p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^* & o'^* \\ o^* & p'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^* & o'^* \\ o^* & p'^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & o \\ o' & p' \end{pmatrix}$$

Z tohoto součinu matic vyjde několik vztahů

$$|p|^2 + |o|^2 = 1; \quad |p'|^2 + |o'|^2 = 1; \quad |p|^2 + |o'|^2 = 1; \quad |p'|^2 + |o|^2 = 1$$

Z těch potom plyne, že $|p| = |p'|, |o| = |o'|, |o| = \sqrt{1-|p|^2}, |o'| = \sqrt{1-|p'|^2}$. Lze to zajistit např. volbou $p \in \mathbb{R}$, $o = \mathrm{i}\sqrt{1-p^2} \in \mathbb{I}$, obdobně pro čárkované součinitele.

Nyní zapišme, jak bude procházet světlo přes jediné zrcadlo. Amplitudu přicházejícího záření označme a_1, odcházejícího b_1. A na druhé straně ať je b_2 amplituda záření přicházejícího a a_2 odcházejícího. Pro jednotlivé ampliduty pak musí platit takovéto vztahy:

$$\begin{array}{rcl} a_2 & = & pa_1 + o'b_2 \\ b_1 & = & oa_1 + p'b_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} a_1 & = & a_2\frac{1}{p} - b_2\frac{o'}{p} \\ b_1 & = & a_2\frac{o}{p} - b_2\frac{oo'}{p} + b_2p' \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{o'}{p} \\ \frac{o}{p} & \frac{pp'-oo'}{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Pokud by nás nezajímala interference, bylo by možné takto poskládat libovolné množství N zrcadel. Amplitudy v tomto případě splňují vztah s touto obecnou maticí Z:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_N \\ b_N \end{pmatrix}$$

Položíme-li potom $b_N = 0$, což platí tehdy, nezáří-li z druhé strany na zrcadla nic, vyjde toto:

$$a_1 = z_{11}a_N; \quad b_1 = z_{21}a_N$$

Srovnáním s maticí pro jedno zrcadlo či stejnou úvahou, která k oné jednozrcadlové matici vedla, vyjde $a_N = \tilde{p}a_1$ a zřejmě $\tilde{p} = 1/z_{11}$, což je součinitel propustnosti pro amplitudy pro celou soustavu zrcadel. Lze čekat, že odrazivost bude vystupovat ve vztahu $b_1 = \tilde{o}a_1$. Víme, že platí $b_1 = z_{21}a_N$. Pokud z prvního vztahu dosadíme $a_N = a_1/z_{11}$, vyjde $b_1 = \frac{z_{21}}{z_{11}}a_1$. Čekáme, že $\frac{z_{21}}{z_{11}} = \tilde{o}$, mělo by tak platit, že $z_{21} = \tilde{o}/\tilde{p}$, což stojí i v matici pro jedno zrcadlo.

Tyto vztahy však platí pro amplitudy. Intenzita záření je úměrná druhé mocniny absolutní hodnoty amplutudy, stejný vztah platí i pro součinitele propustnosti a odrazivosti pro intenzity. Tedy

$$\mathcal{P} = |\tilde{p}|^2 = |z_{11}|^{-2}; \quad \mathcal{O} = |\tilde{o}|^2 = \left|\frac{z_{21}}{z_{11}}\right|^2$$

Na interferenci se zatím opět nedostalo, to lze ale snadno napravit. Je-li zrcadel více, mění se mezi jednotlivými zrcadly fáze vlny. Vlnu můžeme vyjádřit třeba takto:

$$\begin{array}{rcll} \psi_+(x,t) & = & A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} & \ldots \text{ve směru rostoucího } x \\ \psi_-(x,t) & = & B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx-\omega t)} & \ldots \text{na druhou stranu} \end{array}$$

Původní vztah pro průchod vlnění zrcadlem je dobré trochu přeznačit:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{o'}{p} \\ \frac{o}{p} & \frac{pp'-oo'}{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{b}_1 \end{pmatrix}$$

Mezi $\overline{a}_1, \overline{b}_1$ a a_2, b_2 dojde k fázovému posuvu.

$$\begin{array}{rclcrcl} \overline{a}_1 & = & \psi_+(x_1,t_1) & \quad & a_2 & = & \psi_+(x_2,t_2) \\ \overline{b}_1 & = & \psi_-(x_1,t_1) & & b_2 & = & \psi_-(x_2,t_2) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \frac{\overline{a}_1}{a_2} & = & \frac{\psi_+(x_1,t_1)}{\psi_+(x_2,t_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k(x_1-x_2)-\omega(t_1-t_2)]} \\ \frac{\overline{b}_1}{b_2} & = & \frac{\psi_-(x_1,t_1)}{\psi_-(x_2,t_2)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[k(x_1-x_2)-\omega(t_1-t_2)]} \end{array}$$

Označíme-li změnu fáze $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, pak pro $t_2 \to t_1$ platí $\varphi = k(x_2 - x_1) = kl$, kde l je vzdálenost zrcadel. Potom vyjde

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Toto lze konečně sloučit s předešlým vztahem, pro jeden průchod zrcadlem a prostorem mezi zrcadly nakonec platí

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\frac{1}{p} & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{o'}{p} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\frac{o}{p} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{pp'-oo'}{p} \end{pmatrix}}^{Z_1} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Tyto matice lze skládat podobně jako v předchozím příkladě.

Nyní můžeme zkusit prozkoumat interferenci. Pro jednoduchost půjde o řadu stejných zrcadel ve stejných vzdálenostech. Výsledná matice pak bude splňovat toto

$$Z = Z_1^N; \quad Z_1 = SZ_DS^{-1} \Rightarrow Z = (SZ_DS^{-1})^N = SZ_D^NS^{-1}$$

Matice S, S^{-1} jsou takové, že diagonalizují matici Z_1 do tvaru Z_D. Matici 2×2 lze diagonalizovat třeba takto:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_{21}}{z_{11}} & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}}_{Z_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{z_{12}}{z_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S} = \underbrace{\begin{pmatrix} z_{11} & 0 \\ 0 & z_{22} - \frac{z_{21}z_{12}}{z_{11}} \end{pmatrix}}_{Z_D}$$

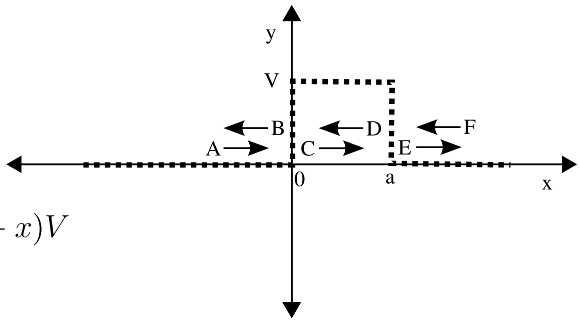
Matice Z_1 je však hermitovská ($r, r' \in \mathbb{R}; o, o' \in \mathbb{I}$), takže $z_{21} = z_{12}^* = -z_{12}$. Potom je $T^{-1} = S^{-1}$. Matice Z je potom určena tímto vztahem:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & \frac{z_{21}}{z_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & 0 \\ 0 & z_{22} - \frac{|z_{21}|^2}{z_{11}} \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_{21}}{z_{11}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11}^N - \frac{|z_{21}|^2}{z_{11}^2}(z_{22} - \frac{|z_{21}|^2}{z_{11}})^N & \frac{z_{21}}{z_{11}}(z_{22} - \frac{|z_{21}|^2}{z_{11}})^N \\ -\frac{z_{21}}{z_{11}}(z_{22} - \frac{|z_{21}|^2}{z_{11}})^N & (z_{22} - \frac{|z_{21}|^2}{z_{11}})^N \end{pmatrix}$$

Porovnáním dostaneme vztahy pro tuto úlohu:

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \left| z_{11}^N - \frac{|z_{21}|^2}{z_{11}^2} \left(z_{22} - \frac{|z_{21}|^2}{z_{11}} \right)^N \right| \\ \tilde{o} &= \left| \frac{-\frac{z_{21}}{z_{11}}(z_{22} - \frac{|z_{21}|^2}{z_{11}})^N}{z_{11}^N - \frac{|z_{21}|^2}{z_{11}^2} \left(z_{22} - \frac{|z_{21}|^2}{z_{11}} \right)^N} \right|^2 \end{aligned}$$

Můžeme postupovat také jinak a zjišťovat odrazivost potenciálové stěny s výškou V, tj. vyřešit Schrödingerovu rovnici:



$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(x,t) &= \hat{H}\psi(x,t)\\
\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m}+V(x)\\
\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(x,t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x,t)+\mathrm{Y}(x)\mathrm{Y}(a-x)V
\end{aligned}$$

Tuto lze vyšešit separací proměnných, tj. přepsáním vlnové funkce do tvaru $\psi(x,t) = X(x)T(t)$, čímž se rozpadne rovnice na dvě jednodušší:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{T_t}{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{X_{xx}}{X}+V(x) = E$$

Časová složka má řešení $T(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \omega = E/\hbar$, polohová složka už závisí na potenciálu. Ten se však mění skokem, takže lze snadno řešení rozdělit na tři případy, kde $k_1 = k_3 = \sqrt{2mE}/\hbar, k_2 = \sqrt{2m(E-V)}/\hbar$:

$$\begin{aligned}
X(x) &= \mathrm{Y}(-x)X_1(x)+\mathrm{Y}(x)\mathrm{Y}(a-x)X_2(x)+\mathrm{Y}(x-a)X_3(x)\\
X_1(x) &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x}\\
X_2(x) &= C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2x}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2x}\\
X_3(x) &= E\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3x}+F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_3x}
\end{aligned}$$

Pokud složíme z těchto dílčích funkcí celou vlnovou funkci, vyjde toto:

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) = X(x)T(t) &= \mathrm{Y}(-x)\big(\overbrace{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x-\omega t)}}^{\psi_A}+\overbrace{B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1x+\omega t)}}^{\psi_B}\big)+\mathrm{Y}(x)\mathrm{Y}(a-x)\big(\overbrace{C\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2x-\omega t)}}^{\psi_C}+\\
&+\underbrace{D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_2x+\omega t)}}_{\psi_D}\big)+\mathrm{Y}(x-a)\big(\underbrace{E\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_3x-\omega t)}}_{\psi_E}+\underbrace{F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_3x+\omega t)}}_{\psi_F}\big)
\end{aligned}$$

Členy s A, C, E odpovídají vlně letící doprava a s B, D, F doleva – tak, jako na obrázku.

Z těchto členů můžeme usoudit něco o propustnosti a odrazivosti potenciálové stěny. Zatím však nemáme mezi nimi žádné vztahy. Můžeme využít třeba spojitosti vlnové funkce. Časová složka je exponenciální a není na ní nic zvláštního, polohová složka je však rozdělena na tři části. A právě na jejich styčných bodech budeme hledat podmínky spojitosti.

Na levé straně stěny na souřadnici $x = 0$ zřejmě musí platit toto:

$$\begin{aligned}
X_1(0) &= Y_1(0) &\Rightarrow\quad A+B &= C+D\\
X_{1x}(0) &= Y_{1x}(0) &\Rightarrow\quad k_1(A-B) &= k_2(C-D)
\end{aligned}$$

Využili jsme rovnost do první derivace včetně. Protože další derivace jsou jen násobky o dva stupně nižších derivací, není třeba je zohledňovat.

Po úpravách dostaneme tuto závislost součinitelů C, D na A, B:

$$\begin{aligned}
C &= \frac{A}{2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)+\frac{B}{2}\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)\\
D &= \frac{A}{2}\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)+\frac{B}{2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)
\end{aligned}$$

Na pravé straně stěny v $x = a$ vyjdou trochu složitější vztahy:

$$\begin{aligned}
X_2(a) &= X_3(a) &\Rightarrow\quad C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2a}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2a} &= E\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3a}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_3a}\\
X_{2x}(a) &= X_{3x}(a) &\Rightarrow\quad k_2(C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2a}-D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2a}) &= k_3(E\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3a}-F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_3a})
\end{aligned}$$

Tyto rovnice určují vztahy mezi C, D a E, F. Označme $K_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 a}, K_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_3 a}$.

$$EK_3 = \frac{CK_2}{2}\left(1+\frac{k_2}{k_3}\right) + \frac{D/K_2}{2}\left(1-\frac{k_2}{k_3}\right)$$
$$F/K_3 = \frac{CK_2}{2}\left(1-\frac{k_2}{k_3}\right) + \frac{D/K_2}{2}\left(1+\frac{k_2}{k_3}\right)$$

Po dosazení do předchozích vztahů vyjdou vztahy pro A, B a E, F:

$$EK_3 = \frac{A}{4}\left[(1+\tfrac{k_1}{k_2})(1+\tfrac{k_2}{k_3})K_2+(1-\tfrac{k_1}{k_2})(1-\tfrac{k_2}{k_3})/K_2\right] + \frac{B}{4}\left[(1-\tfrac{k_1}{k_2})(1+\tfrac{k_2}{k_3})K_2+(1+\tfrac{k_1}{k_2})(1-\tfrac{k_2}{k_3})/K_2\right]$$
$$F/K_3 = \frac{A}{4}\left[(1+\tfrac{k_1}{k_2})(1-\tfrac{k_2}{k_3})K_2+(1-\tfrac{k_1}{k_2})(1+\tfrac{k_2}{k_3})/K_2\right] + \frac{B}{4}\left[(1-\tfrac{k_1}{k_2})(1-\tfrac{k_2}{k_3})K_2+(1+\tfrac{k_1}{k_2})(1+\tfrac{k_2}{k_3})/K_2\right]$$

Vztahy můžeme trochu zjednodušit, protože potenciál bude mít jen dvě úrovně, totiž 0 a V, tedy $k_1 = k_3$, jak již bylo uvedeno. Po označení $K_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 a}$ vznikne:

$$EK_1 = \frac{A}{4}\left[(1+\tfrac{k_1}{k_2})(1+\tfrac{k_2}{k_1})K_2+(1-\tfrac{k_1}{k_2})(1-\tfrac{k_2}{k_1})/K_2\right] + \frac{B}{4}\left[(1-\tfrac{k_1}{k_2})(1+\tfrac{k_2}{k_1})K_2+(1+\tfrac{k_1}{k_2})(1-\tfrac{k_2}{k_1})/K_2\right]$$
$$F/K_1 = \frac{A}{4}\left[(1+\tfrac{k_1}{k_2})(1-\tfrac{k_2}{k_1})K_2+(1-\tfrac{k_1}{k_2})(1+\tfrac{k_2}{k_1})/K_2\right] + \frac{B}{4}\left[(1-\tfrac{k_1}{k_2})(1-\tfrac{k_2}{k_1})K_2+(1+\tfrac{k_1}{k_2})(1+\tfrac{k_2}{k_1})/K_2\right]$$

Tyto vzorce jdou ještě trochu poupravit:

$$EK_1 = \frac{1}{4k_1k_2}\left\{A\left[(k_1+k_2)^2K_2-(k_1-k_2)^2/K_2\right]+B\left[(k_2^2-k_1^2)K_2+(k_1^2-k_2^2)/K_2\right]\right\}$$
$$F/K_1 = \frac{1}{4k_1k_2}\left\{A\left[(k_1^2-k_2^2)K_2+(k_2^2-k_1^2)/K_2\right]+B\left[-(k_1-k_2)^2K_2+(k_1+k_2)^2/K_2\right]\right\}$$

Vlastní odrazivost a propustnost je dána poměry hustoty toku pravděpodobnosti. Ta je určena vztahem

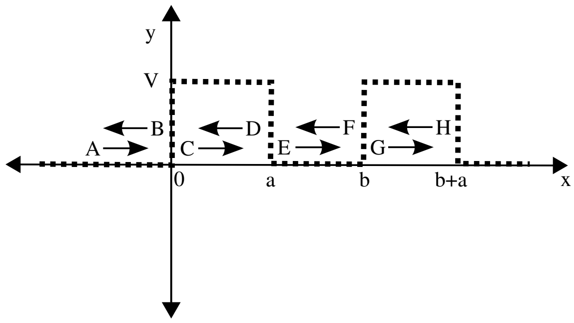
$$j = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi^* - \psi^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi\right)$$

Pro jednotlivé složky vlnové funkce dostaneme

$$\begin{array}{llll} \psi_A\ldots & j_A = +\frac{\hbar k_1 A^2}{m} \quad & \psi_C\ldots & j_C = +\frac{\hbar k_2 C^2}{m} \quad & \psi_E\ldots & j_E = +\frac{\hbar k_1 E^2}{m} \\ \psi_B\ldots & j_B = -\frac{\hbar k_1 B^2}{m} & \psi_D\ldots & j_D = -\frac{\hbar k_2 D^2}{m} & \psi_F\ldots & j_F = -\frac{\hbar k_1 F^2}{m} \end{array}$$

Pokud půjde o stěnu, na kterou přistupuje částice vyjádřená vlnovou funkcí zleva, bude $F = 0$ a $j_F = 0$. Propustnost bude $\mathcal{P} = j_E/j_A$ a odrazivost $\mathcal{O} = j_B/j_A$.

Nyní zkusme přidat ještě jednu potenciálovou stěnu stejně širokou, jako je ta předchozí (a), ale začínající v b. Je třeba doplnit čtvrtou souřadnicovou složku $X_4(x) = G\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2x} + H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2x}$ s těmito okrajovými podmínkami:



$$\begin{array}{rcl} X_3(b) = Y_4(b) & \Rightarrow & E\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1b} + F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1b} = G\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2b} + H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2b} \\ X_{3x}(b) = Y_{4x}(b) & \Rightarrow & k_1(E\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1b} - F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1b}) = k_2(G\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2b} - H\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2b}) \end{array}$$

Vztahy mezi E, F a G, H jsou skoro stejné jako mezi C, D a E, F. Označme $L_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1b}, L_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2b}$.

$$GL_2 = \frac{EL_1}{2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right) + \frac{F/L_1}{2}\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)$$
$$H/L_2 = \frac{EL_1}{2}\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right) + \frac{F/L_1}{2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)$$

Předchozí příkad nedává příliš přehledné výsledky, proto by bylo dobré zkusit výpočet s jiným potenciálem, který je všude nulový, jen v okolí bodů vzdálených od sebe o vzdálenost L je integrál z potenciálu podle souřadnice roven A.

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\delta(x - nL)$$

Postup řešení je podobný, jako v předchozím příkladě. Schrödingerova rovnice má shodnou podobu:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(x,t) = \hat{H}\psi(x,t); \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x)$$

Opět je třeba separovat proměnné a získat toto řešení:

$$\psi(x,t) = X(x)T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Y}(x - nL)\mathrm{Y}(-x - nL - L)\left[A_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_n x - \omega t)} + B_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_n x + \omega t)}\right]$$

Amplituda vlnové funkce přicházející na potenciálovou špičku je A_n, odcházející B_n. K určení vztahů mezi jednotlivými hodnotami A_n, B_n jsou opět potřeba okrajové podmínky. Opět to bude spojitost $X(x)$ v $x = nL$. Spojitost první derivace nelze kvůli potenciálu zaručit.

$$\int\limits_{nL-\varepsilon/2}^{nL+\varepsilon/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial x}\psi(nL + \varepsilon/2, t) - \frac{\partial}{\partial x}\psi(nL - \varepsilon/2, t)$$

Tento integrál umožňuje tento problém obejít. Protože však víme, co je ψ'', můžeme to dosadit ze stacionární Schrödingerovy rovnice:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) &= -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi(x,t) \\
\int\limits_{nL-\varepsilon/2}^{nL+\varepsilon/2} -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi(x,t) &= -\frac{2m}{\hbar^2}\left[\int\limits_{nL-\varepsilon/2}^{nL+\varepsilon/2}\mathrm{d}x\,\psi(x,t)\left(E - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\delta(x - nL)\right)\right] = \\
&\overset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{2m}{\hbar^2}A\psi(nL,t)
\end{aligned}$$

Podmínka spojitosti $X(x)$ v $x = 0$ (aby se snáz počítalo) dá tento vztah:

$$\begin{aligned}
X_{\mathrm{I.}}(x) &= A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \\
X_{\mathrm{II.}}(x) &= A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-L)} + B_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-L)}
\end{aligned}$$

Potom zřejmě platí:

$$X_{\mathrm{I.}}(0) = X_{\mathrm{II.}}(0) \;\Rightarrow\; A_1 + B_1 = A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL} + B_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}$$

$$\begin{aligned}
X'_{\mathrm{II.}}(0+) - X'_{\mathrm{I.}}(0-) &= \tfrac{2m}{\hbar^2}AX_{\mathrm{II.}}(0) \Rightarrow \\
\Rightarrow \mathrm{i}k(A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL} - B_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} - A_1\mathrm{e}^0 + B_1\mathrm{e}^0) &= \tfrac{2mA}{\hbar^2}(A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL} + B_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL})
\end{aligned}$$

Z těchto rovnic lze získat jejich sečtením a odečtením přímo matici propustnosti pro amplitudy:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL}\left(1 + \frac{mA}{k\hbar^2}\right) & \mathrm{i}\frac{mA}{k\hbar^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} \\ -\mathrm{i}\frac{mA}{k\hbar^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}\left(1 - \frac{mA}{k\hbar^2}\right) \end{pmatrix}}_{Z} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

Otázka nyní zní, za jakých podmínek bude řada zrcadel záření volně propouštět. Není žádoucí, aby se záření někde ztrácelo, ani aby se odráželo.

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} \wedge |A_n| = |A_{n+1}| \wedge |B_n| = |B_{n+1}|$$

Lze to zajistit třeba tak, že $(A_n, B_n)^T$ bude vlastní vektor matice Z s vlastní hodnotou $|\lambda| = 1$. Podstatná je ta vlastní hodnota rovná komplexní jednotce, jedině tak projde vlna soustavou zrcadel bez odrazu.

$$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL}\left(1 + \frac{mA}{k\hbar^2}\right) - \lambda & \mathrm{i}\frac{mA}{k\hbar^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} \\ -\mathrm{i}\frac{mA}{k\hbar^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}\left(1 - \frac{mA}{k\hbar^2}\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Z rovnice pro determinant vyjde rovnice pro vlastní hodnoty:

$$\lambda^2 - \lambda\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL}\left(1 + \mathrm{i}\frac{mA}{k\hbar^2}\right) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}\left(1 - \mathrm{i}\frac{mA}{k\hbar^2}\right)\right] + 1 = 0$$

Exponenciály lze přepsat pomocí goniometrických funkcí:

$$\lambda^2 - 2\lambda\left[\cos kL + \frac{mA}{k\hbar^2}\sin kL\right] + 1 = 0$$

Aby platilo $|\lambda| = 1$, musí být diskriminant nulový (pak může být $\lambda = 1$ dvojnásobný kořen), nebo záporný (pak může být obecná komplexní jednotka). Tedy

$$4\left[\cos kL + \frac{mA}{k\hbar^2}\sin kL\right]^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow \left|\cos kL + \frac{mA}{k\hbar^2}\sin kL\right| \leq 1$$