I. Samovolné stlačení tyče v tíhovém poli

Tomáš Záležák

Je dána kartézská souřadná soustava $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. V prostoru s tíhovým zrychlením $\vec{g} = (0, 0, -g)$ se nachází tyč (hranol), dolní konec (podstava) leží v rovině $z = 0$ na podložce, horní konec v rovině $z = l$. Jak se tyč stlačí působením tíhového pole?

Nejprve je třeba zapsat rovnici rovnováhy silového působení[1]:

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} + \rho\vec{g} = \vec{0} \quad \text{či} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0, \quad i, j \in \{x, y, z\} \tag{1}$$

Horní konec tyče není nijak zatížen, proto $\sigma_{xi}(x, y, l) = 0,\ i \in \{x, y, z\}$. Na stěnách tyče opět nepůsobí žádné síly, na nich jsou všechny složky tenzoru napětí nulové, tj. $\sigma_{ij} = 0$. Tímto jsou uvedeny všechny okrajové podmínky.

Tenzor napětí můžeme nahradit potenciálem:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j}, \quad i, j \in \{x, y, z\} \tag{2}$$

Potenciál potom splňuje rovnici

$$\Delta\vec{\chi} = \rho\vec{g} \quad \text{či} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i \partial x_j} = \rho g_j \tag{3}$$

Přepsáním okrajových podmínek a rovnice rovnováhy dostanene:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial \chi_x}{\partial x_i} = 0,\ i \in x, y, z & \frac{\partial \chi_z}{\partial z}\Big|_{z=l} = 0 \\ \frac{\partial \chi_y}{\partial x_i} = 0 & \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial z^2} = \rho g \\ \frac{\partial \chi_z}{\partial x} = \frac{\partial \chi_z}{\partial y} = 0 & \end{array} \tag{4}$$

Je vidět, že $\chi_x =$ konst., $\chi_y =$ konst. a $\chi_z = \chi_z(z)$ nezávisí na souřadnicích x, y. Dále platí $\chi_z'(l) = 0$ a $\chi_z''(z) = \rho g$. Z toho dostaneme

$$\begin{aligned} \chi_z'(z) &= \int \rho g \, \mathrm{d}z = \rho g z + \text{konst.} \\ \chi_z'(l) &= \rho g l + \text{konst.} = 0 \Rightarrow \\ \sigma_{zz}(z) = \chi_z'(z) &= \rho g (z - l) \end{aligned} \tag{5}$$

Ostatní složky tenzoru napětí budou nulové.

K popisu deformace lze použít tenzor deformace, ten je svázán s tenzorem napětí Hookovým zákonem a z něj plynoucích vztahů[2]:

$$\begin{array}{ll} u_{xx} = [\sigma_{xx} - \sigma(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]/E & u_{xy} = \sigma_{xy}(1 + \sigma)/E \\ u_{yy} = [\sigma_{yy} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]/E & u_{xz} = \sigma_{xz}(1 + \sigma)/E \\ u_{zz} = [\sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]/E & u_{yz} = \sigma_{yz}(1 + \sigma)/E \end{array} \tag{6}$$

Pro tenzor deformace tak dostaneme:

$$\begin{aligned} u_{zz} &= \sigma_{zz}/E &&= \rho g (z - l)/E \\ u_{xx} = u_{yy} &= -\sigma\sigma_{zz}/E &&= -\sigma\rho g (z - l)/E \end{aligned} \tag{7}$$

Nediagonální složky jsou nulové.

---

[1] Tenzor napětí je zde značen $\hat{\sigma}$ či σ_{ij}. Souřadnice x, y, z jsou často značeny x_1, x_2, x_3, aby je bylo možné indexovat.

[2] Zde vystupuje Youngův modul E a Poissonův poměr příčného zkrácení a podélného natažení σ.

Tenzor deformace je v linerární teorii pružnosti zaveden jako symetriký součet dvou parciálních derivací vektorového pole deformace:

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{8}$$

Složky vektorového pole deformace dostaneme integrací:

$$\begin{array}{rcl} u_{xx} = \partial u_x/\partial x \;\Rightarrow\; u_x = \int u_{xx}\,\mathrm{d}x & = & -\sigma\rho g(z-l)x/E \\ u_{yy} = \partial u_y/\partial y \;\Rightarrow\; u_y = \int u_{yy}\,\mathrm{d}y & = & -\sigma\rho g(z-l)y/E \\ u_{zz} = \partial u_z/\partial z \;\Rightarrow\; u_z = \int u_{zz}\,\mathrm{d}z & = & \rho g(z^2/2 - lz)/E \end{array} \tag{9}$$

Toto však nejsou ještě konečné výsledky. Ještě je potřeba rozepsat tři složky tenzoru deformace, o nichž víme, že jejich hodnota je nulová.

$$\begin{array}{rcccl} u_{xy} & = & 1/2 \cdot (\partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x) & = & 0 \\ u_{yz} & = & 1/2 \cdot (\partial u_y/\partial z + \partial u_z/\partial y) & = & 0 \\ u_{xz} & = & 1/2 \cdot (\partial u_x/\partial x + \partial u_z/\partial x) & = & 0 \end{array} \tag{10}$$

Je zřejmé, že neúplné řešení (9) vyhovuje vztahu $u_{xy} = 0$ v (10). Další dva ($u_{yz} = u_{xz} = 0$) zatím splněny nejsou. Je třeba, aby platilo, že $\partial u_x/\partial z = -\partial u_z/\partial x$ a $\partial u_y/\partial z = -\partial u_z/\partial y$, což lze zajistit jedině takto:

$$u_z = \rho g[z^2/2 - lz + \sigma(x^2 + y^2)/2]$$

Nakonec tedy dostaneme

$$\begin{array}{rcl} u_x & = & -\sigma\rho g(z-l)x/E \\ u_y & = & -\sigma\rho g(z-l)y/E \\ u_z & = & \rho g[z^2/2 - lz + \sigma(x^2 + y^2)/2] \end{array} \tag{11}$$

Toto řešení však není zcela přesné, protože dolní podstava tyče je položena v počátku, což přidává další okrajovou podmínku $u_z(x, y, 0) = 0$ (podstava se nepohybuje). Tu však uvedené řešení nesplňuje, tudíž na dolním konci tyče platí jen v bodě $(0, 0, 0)$.